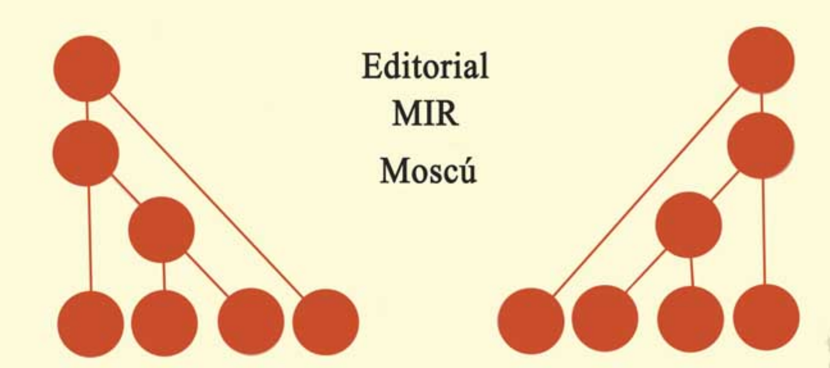


G. P. GAVRÍLOV
A. A. SAPOZHENKO

PROBLEMAS de MATEMÁTICA DISCRETA



Editorial
MIR
Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Г. П. Гаврилов,
А. А. Сапоженко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Издательство
«НАУКА»
Москва

G. P. GAVRÍLOV
A. A. SAPOZHENKO

PROBLEMAS de MATEMÁTICA DISCRETA

Editorial
MIR
Moscú

Traducido del ruso por
Bernardo del Río Salceda, candidato
a doctor en ciencias técnicas

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1980

INDICE

Introducción 7

CAPÍTULO I. LAS FUNCIONES DE BOOLE, SUS FORMAS DE DESIGNACIÓN Y SUS PROPIEDADES PRINCIPALES 11

§ 1. Vectores de Boole y el cubo unidad n-dimensional 11
§ 2. Formas de expresión de las funciones de Boole. Funciones elementales. Fórmulas. Operación de superposición 21
§ 3. Tipos especiales de fórmulas. Formas normales disyuntivas y conjuntivas. Polinomios 30
§ 4. Minimización de las funciones de Boole 37
§ 5. Variables sustanciales y ficticias 43

CAPÍTULO II. CLASES CERRADAS Y PLENITUD 48

§ 1. Operación de clausura. Clases cerradas 48
§ 2. Dualidad y clase de funciones autoduales 52
§ 3. Linealidad y clase de funciones lineales 55
§ 4. Clases de funciones que conservan las constantes 58
§ 5. Monotonía y clase de funciones monótonas 61
§ 6. Plenitud y clases cerradas 66

CAPÍTULO III. LÓGICAS k-VALENTES 71

§ 1. Representación de las funciones de las lógicas k-valentes con fórmulas de tipo especial 71
§ 2. Clases cerradas de la lógica k-valente 79
§ 3. Estudio de la plenitud de las funciones de la lógica k-valente 85

CAPÍTULO IV. GRAFOS Y REDES 91

§ 1. Conceptos fundamentales de la teoría de los grafos 91
§ 2. Planicidad, conexión, características numerales de los grafos . . . 99
§ 3. Grafos orientados 104
§ 4. Arboles y redes bipolares 109
§ 5. Evaluaciones en la teoría de los grafos y redes 120
§ 6. Realización de las funciones booleanas por medio de esquemas de contacto y de fórmulas 129

CAPÍTULO V. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CODIFICACIÓN 138

§ 1. Códigos con corrección de errores 138
§ 2. Códigos lineales 142
§ 3. Codificación alfabética 146

CAPÍTULO VI. AUTÓMATAS FINITOS 154

§ 1. Funciones determinadas y de determinación acotada 154
§ 2. Representación de funciones determinadas con diagramas de Moore, con ecuaciones canónicas, con tablas y con esquemas. Operaciones sobre las funciones determinadas 164
§ 3. Clases cerradas y plenitud en los conjuntos de funciones determinadas y acotadas-determinadas 180

CAPÍTULO VII. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LOS ALGORITMOS 185

§ 1. Máquinas de Turing y operaciones a las que se someten. Funciones calculables en las máquinas de Turing 185
§ 2. Clases de funciones calculables y recursivas 203
§ 3. Calculabilidad y complejidad de los cálculos 210

CAPÍTULO VIII. ELEMENTOS DE COMBINATORIA 215

§ 1. Permutaciones y combinaciones. Propiedades de los coeficientes binominales 215
§ 2. Fórmula de inclusiones y exclusiones 223
§ 3. Sucesiones regresivas, funciones generatrices, relaciones recurrentes 226
§ 4. Evaluaciones asintóticas y desigualdades 235
Soluciones, resultados e indicaciones 242

Bibliografía 307

Índice alfabético de materias 309

INTRODUCCION

Esta colección de problemas que se propone al lector se proyectó como un manual de ejercicios para la asignatura de matemática discreta destinado fundamentalmente para los estudiantes de los primeros cursos de las universidades. También puede ser útil para los estudiantes de los cursos superiores y los aspirantes a doctor que se especializan en el terreno de la matemática discreta. Los profesores pueden emplear este libro al preparar las clases prácticas.

El libro se basa en el curso de matemática discreta que se dio durante una serie de años en la facultad mecánico-matemática y ahora en la facultad de matemática de cómputo y cibernética de la Universidad estatal de Moscú.

El libro se compone de ocho capítulos. Los dos primeros están dedicados a la lógica algebraica. La sección dedicada a la lógica algebraica es fundamental en el estudio de la matemática discreta. En la facultad de matemática de cómputo y cibernética de la Universidad de Moscú esta sección ocupa una cuarta parte del tiempo dedicado a las conferencias y ejercicios prácticos. A base de este material los estudiantes adquieren los primeros conocimientos sobre tales conceptos como función discreta, operación de superposición, sistema funcionalmente completo; asimilan las diferentes formas de presentación de las funciones discretas (en forma de tablas, representación con polinomios y formas normales, representación geométrica con el empleo del cubo unidad n-dimensional); estudian los procedimientos de investigación de la plenitud y propiedad de cerrado de los sistemas de funciones.

El tercer capítulo está dedicado a las lógicas k-valentes. Los problemas aquí presentados persiguen el fin de iniciar al lector en la descomposición canónica de las funciones k-valentes con transformaciones equivalentes de las fórmulas, en las principales clases

cerradas de funciones de lógica k-valente y en los métodos de investigación de la plenitud y propiedad de cerrado de sistemas de funciones. En una serie de problemas se ilustra la diferencia que existe entre las lógicas k-valentes ($k > 2$) y la lógica algebraica.

El capítulo cuarto contiene problemas de la teoría de los grafos (orientados y no orientados), de la teoría de las redes y de esquemas. El objetivo de esta sección es dar a conocer al estudiante los conceptos fundamentales, los métodos y el lenguaje de la teoría de los grafos. Todo esto se emplea muy ampliamente para describir e investigar las propiedades de las estructuras de los objetos en los más variados terrenos de la ciencia y de la técnica. En esta parte hay problemas predestinados a afirmar los conocimientos de los conceptos principales de la teoría de los grafos; problemas que ilustran la aplicación de la teoría de los grafos y las redes a la síntesis de esquemas que realizan funciones booleanas; problemas de cálculo de objetos con una estructura geométrica dada, etc. Los autores esperan que los profesores también encontrarán aquí problemas con la ayuda de los cuales podrán enseñar a los estudiantes a hacer rigurosas demostraciones matemáticas de afirmaciones geométricas «evidentes».

El quinto capítulo está dedicado a la teoría de la codificación. Los problemas presentados tratan sobre las propiedades de los códigos que corrigen errores; sobre los códigos alfabéticos; sobre los códigos con mínimo exceso.

El capítulo sexto contiene problemas que muestran diferentes modos de descripción de transformadores discretos (autómatas). Se han incluido problemas para revelar la determinación y la determinación acotada de los autómatas; para presentar autómatas de diferentes maneras: por medio de diagramas, de ecuaciones canónicas, de esquemas; para investigar la plenitud funcional y la cerrabilidad de los sistemas de aplicaciones automáticas; para estudiar las propiedades de las diferentes operaciones a las que se pueden someter estas aplicaciones.

El séptimo capítulo, dedicado a los elementos de la teoría de los algoritmos, tiene como fin dar nociones sobre la eficacia de la calculabilidad y la complejidad de los cómputos, sobre ciertas formas concretas de definición del algoritmo (máquinas de Turing y funciones recursivas).

El capítulo ocho tiene un carácter auxiliar y está dedicado a la combinatoria. Esta parte sale de los límites del curso universitario de la matemática discreta. No obstante, el que estudia la matemática discreta frecuentemente choca con cuestiones sobre la existencia, el cálculo y la evaluación de diferentes objetos combinatorios. Por este motivo los autores han considerado útil incluir también problemas sobre combinatoria.

Actualmente todavía no existe un manual que abarque por completo los materiales teóricos del programa del curso universitario de la asignatura «matemática discreta». El primer tomo de la monografía «La matemática discreta y las cuestiones matemáticas de la

cibernética» (en ruso; Moscú, editorial «Naúka», 1974), que es hoy el manual básico, contiene el material teórico que corresponde a los cinco primeros capítulos de este libro. La literatura correspondiente a los demás capítulos se halla dispersa en varias monografías. Por eso los autores de este libro de problemas tuvieron que anticipar cada párrafo con notas teóricas, a veces con más detalle que lo habitualmente acostumbra para este tipo de obras.

En el libro se dan los resultados de muchos (no de todos) problemas y las indicaciones correspondientes. Las soluciones se exponen lo más abreviadamente posible en un estilo compendioso, se omiten las conclusiones triviales. En ciertos casos se hace exclusivamente un pequeño esbozo de la solución.

Según su origen los materiales de esta colección de problemas son bastante variados. Una parte considerable de los problemas tiene un carácter «folklórico». Estos son bien conocidos por los especialistas de la matemática discreta, sin embargo es casi imposible establecer la paternidad de los problemas de este género. En el proceso de las clases prácticas, de la toma de exámenes de matemática discreta y también durante la escritura de este libro los autores crearon la parte fundamental de problemas incluidos en él. Cierta parte de problemas surgió como resultado del estudio de artículos de revistas. Algunos problemas los hemos extraído de otros manuales. Miembros de la cátedra de matemática cibernética de la Universidad de Moscú y otros colegas nuestros nos propusieron una serie de problemas. O. B. Lupanov presentó a disposición de los autores muchos de ellos. Algunos problemas fueron propuestos por S. V. Yablonsky, V. B. Alekséiev, A. A. Evdokímov, V. K. Leontiev, A. A. Márkov. A todos ellos les expresamos un sincero agradecimiento.

Los autores quedan muy reconocidos por la atención que ha concedido S. V. Yablonsky a nuestro trabajo para la preparación de este libro. Sus consejos y recomendaciones han determinado considerablemente la estructura y la dirección temática de esta colección de problemas.

Los autores agradecen profundamente la participación de O. B. Lupanov, quien revisó todo el manuscrito y dedicó mucho tiempo a la discusión de su contenido.

Nosotros estamos sinceramente reconocidos a S. S. Márchenkov por su minuciosa revisión del capítulo «Elementos de la teoría de los algoritmos», a V. I. Levenshtein por su examen del capítulo «Elementos de la teoría de la codificación» y también a los recensionistas V. V. Glagóliev y A. A. Márkov por las observaciones críticas y las ideas que expusieron para mejorar el libro.

G. P. Gavrílov, A. A. Sapozhenko

Capítulo
I

LAS FUNCIONES DE BOOLE, SUS FORMAS DE DESIGNACION Y SUS PROPIEDADES PRINCIPALES

§ 1. VECTORES DE BOOLE Y EL CUBO UNIDAD n-DIMENSIONAL [1]

El vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cuyas coordenadas toman sus valores del conjunto $\{0, 1\}$ se llama *binario* o *vector booleano* (*colección*). Para abreviar designaremos tal vector por $\widetilde{\alpha}^n$ o $\widetilde{\alpha}$. El número n se llama *longitud del vector*. El conjunto de todos los vectores booleanos de longitud n se llama *cubo unidad n-dimensional* y se designa por B^n. Los propios vectores $\widetilde{\alpha}^n$ se llaman *vértices del cubo* B^n. *Peso* $\| \widetilde{\alpha}^n \|$ o *norma del vector* $\widetilde{\alpha}^n$ se llama al número de sus coordenadas iguales a la unidad o sea $\| \widetilde{\alpha}^n \| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Al conjunto de todos los vértices del cubo B^n que tienen un peso k, le denominaremos *k-ésima capa del cubo* B^n, y lo designaremos por B_k^n. A cada vector booleano $\widetilde{\alpha}^n$ se le puede confrontar el número $\nu (\widetilde{\alpha}^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$ que se llama *número del vector* $\widetilde{\alpha}^n$. La colección $\widetilde{\alpha}^n$ es, evidentemente, una descomposición binaria del número $\nu (\widetilde{\alpha}^n)$. *La distancia* (*de Hamming*) *entre los vértices* $\widetilde{\alpha}$ *y* $\widetilde{\beta}$ del cubo B^n se llama número $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i - \beta_i |$, que es igual al número de las coordenadas en las que ellos se diferencian. La distancia de Hamming es la métrica y el cubo B^n es el espacio métrico. Las colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n se llaman *adyacentes* si $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$ y *opuestas* si $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$. Un par de vértices adyacentes no ordenado se llama *arista del cubo*. El conjunto $B_k^n (\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{\beta}: \rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k\}$ se llama *esfera* y el conjunto $S_k^n (\widetilde{\alpha}) =$

[1]) Este párrafo es auxiliar. En lo sucesivo se emplean sólo los problemas 1.1—1.6; 1.11; 1.14; 1.15; 1.31; 1.34; 1.35; 1.44.

$= \{\tilde{\beta}: \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant k\}$ se llama *bola de radio* k *con el centro* en $\tilde{\alpha}$. Se dice que la colección $\tilde{\alpha}^n$ *precede* a la colección $\tilde{\beta}^n$ (lo que se designa $\tilde{\alpha}^n \leqslant \tilde{\beta}^n$) si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para todos los $i = \overline{1, n}$. Si tiene lugar $\tilde{\alpha}^n \neq \tilde{\beta}^n$, entonces, se dice que $\tilde{\alpha}^n$ *rigurosamente precede a* $\tilde{\beta}^n$ (lo que se designa $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$). Si tiene lugar aunque sea una de las dos relaciones $\tilde{\alpha}^n \leqslant \leqslant \tilde{\beta}^n$ o $\tilde{\beta}^n \leqslant \tilde{\alpha}^n$, entonces $\tilde{\alpha}^n$ y $\tilde{\beta}^n$ se llaman *congruentes*. En el caso contrario se dice que $\tilde{\alpha}^n$ y $\tilde{\beta}^n$ son *incongruentes*. La colección $\tilde{\alpha}^n$ *precede inmediatamente* a la colección $\tilde{\beta}^n$ si $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$ y $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = 1$. La relación de precedencia entre las colecciones es una relación de orden parcial en B^n. En la fig. 1 se representan diagramas de los conjuntos parcialmente ordenados B^2, B^3, B^4. La sucesión de los vértices del cubo $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ se llama *cadena que una* a $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_k$

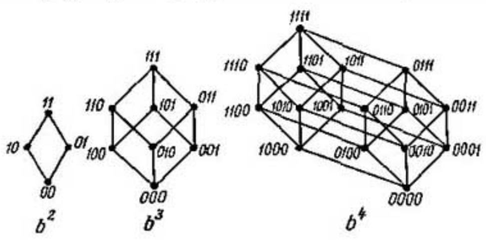


Fig. 1.

(lo que se designa: $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k]$) si $\rho(\tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\alpha}_i) = 1$ $(i = \overline{1, k})$. El número k se llama *longitud de la cadena* $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k$. La cadena $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ *es creciente si* $\tilde{\alpha}_{i-1} < \tilde{\alpha}_i$ $(i = \overline{1, k})$. La cadena z de la variedad $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ se llama *ciclo de longitud* k si $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_k$. Supongamos que $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son vectores de B^n. Por $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ designaremos al vector $(\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$ obtenido por medio de la suma por el módulo 2 de cada par de coordenadas de los vectores $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Por $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}$ designaremos al vector cuya i-ésima coordenada es igual a 0 si, y sólo si, $\alpha_i = \beta_i = 0$. Por $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}$ designaremos al vector cuya i-ésima coordenada es igual a 1 si, y sólo si, $\alpha_i = \beta_i = 1$. Por $\bar{\tilde{\alpha}}$ designaremos a un vector (*opuesto* a $\tilde{\alpha}$) cuya i-ésima coordenada toma el valor 0, si $\alpha_i = 1$, y el valor 1, si $\alpha_i = 0$. Si $\sigma \in \{0, 1\}$ admitimos que $\sigma\tilde{\alpha} = (\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \ldots, \sigma\alpha_n)$. Con el símbolo $\tilde{0}$, designamos al vector $(0, 0, \ldots, 0)$ y con el símbolo $\tilde{1}$, al vector $(1, 1, \ldots, 1)$.

El conjunto $B^{n, i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}$ de todas las colecciones $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de B^n en las que $\alpha_{i_j} = \sigma_j$ $(j = \overline{1, k})$, se llama *cara* del cubo B^n. El

conjunto $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ se llama *dirección de la cara*, el número k se llama *rango de la cara* y $n - k$, *dimensión de la cara*.

1.1. 1) Encontrar el número $|B_k^n|$ de colecciones $\tilde{\alpha}^n$ de peso k.

2) ¿A qué es igual el número de todos los vértices del cubo B^n?

1.2. 1) Hallar los números de las colecciones (1001), (01101), (110010).

2) Encontrar un vector de longitud 6 que sea una descomposición binaria del número 19.

1.3. ¿A qué es igual el número de colecciones $\tilde{\alpha} \in B_k^n$ que satisfacen la condición $2^{n-1} \leqslant \nu(\tilde{\alpha}) < 2^n$?

1.4. Mostrar que para cualesquier $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ de B^n son justas las relaciones:

$$1)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) \leqslant \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma});$$

$$2)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = \rho(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \oplus \tilde{\beta});$$

$$3)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \|\tilde{\alpha}\| + \|\tilde{\beta}\| - 2\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\|;$$

$$4)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \|\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}\|.$$

1.5. 1) Hallar el número de pares no ordenados de los vértices adyacentes en B^n.

2) Hallar el número de pares no ordenados de las colecciones $(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n)$ tales que $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = k$.

1.6. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ vértices del cubo B^n, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = m$. Encontrar el número de vértices $\tilde{\gamma}$ que satisfacen la condición:

$$1)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + \rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta});$$

$$2)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = k, \quad \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = r;$$

$$3)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) \leqslant k, \quad \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = r;$$

$$4)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) \leqslant k, \quad \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \geqslant r.$$

1.7. Demostrar la incompatibilidad de los siguientes sistemas de relaciones para $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ de B^n, $n \geqslant 2$:

$$1)\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) > 2n/3, \quad \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) > 2n/3, \quad \rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) > 2n/3;$$

$$2)\ \nu(\tilde{\alpha}) < \nu(\tilde{\beta} \oplus \tilde{\gamma}), \quad \nu(\tilde{\beta}) < \nu(\tilde{\gamma} \oplus \tilde{\alpha}), \quad \nu(\tilde{\gamma}) < \nu(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta});$$

$$3)\ \|\tilde{\alpha}\| > \|\tilde{\beta} \oplus \tilde{\gamma}\|, \ \|\tilde{\beta}\| > \|\tilde{\gamma} \oplus \tilde{\alpha}\|, \ \|\tilde{\gamma}\| > \|\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}\|, \quad \|\tilde{\alpha} \cap (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma})\| = 0;$$

$$4)\ \|\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} \oplus \tilde{\gamma}\| = 0, \quad \|\overline{\tilde{\alpha}} \oplus \overline{\tilde{\beta}} \oplus \overline{\tilde{\gamma}}\| = n - 1.$$

1.8. Supongamos que $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ son vértices de B^n. Mostrar que:

1) $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ es equivalente a $\tilde{\alpha} \cap \overline{\tilde{\beta}} = \tilde{0}$;

2) $\overline{\tilde{\alpha}} \cup \tilde{\beta} = \tilde{1}$ es equivalente a $\overline{\tilde{\beta}} \leqslant \overline{\tilde{\alpha}}$;

3) $\tilde{\alpha} \cap (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$;

4) $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$;

5) $(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap (\tilde{\beta} \cup \tilde{\gamma}) = (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup \tilde{\beta}$;

6) $((\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma} = (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma})$;

7) de $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma}$, se deduce que $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma}$;

8) $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma}$ es equivalente a $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) \leqslant (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma}$;

9) $(\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}) \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) \cup (\tilde{\gamma} \cap \tilde{\alpha}) = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap (\tilde{\beta} \cup \tilde{\gamma}) \cap (\tilde{\gamma} \cup \tilde{\alpha})$.

1.9. ¿Cuál es el número de vectores $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12})$ de B_6^{12}, tales que $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i \leqslant m/2$ para todos los $m = \overline{1,12}$?

1.10. Hallar el número de vectores $\tilde{\alpha}$ de B_k^n tales que entre dos coordenadas de unidad existan por lo menos r nulas.

1.11. 1) Mostrar que en B^n existe un conjunto formado por $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ vectores incongruentes de par en par.

2) Mostrar que cualquier subconjunto que contenga no menos de $n + 2$ vectores incluye un par de vectores incongruentes.

1.12. Sean $0 \leqslant l < k \leqslant n$ y $A(\tilde{\alpha})$ un conjunto de todos los vectores de B^n congruentes con $\tilde{\alpha}$. Hallar la potencia del conjunto C:

$$1)\ C = A(\tilde{\alpha}) \cap B_k^n, \quad \tilde{\alpha} \in B_l^n;$$

$$2)\ C = A(\tilde{\alpha}) \cap B_l^n, \quad \tilde{\alpha} \in B_k^n;$$

$$3)\ C = A(\tilde{\alpha}), \quad \tilde{\alpha} \in B_k^n.$$

1.13. Supongamos que $A \subseteq B_l^n$, y B es un conjunto de todas las colecciones de B_k^n comparables aunque sea con una sola colección de A. Demostrar que $\frac{|A|}{\binom{n}{l}} \leqslant \frac{|B|}{\binom{n}{k}}$.

1.14. 1) Mostrar, que en B^n existe un número $n!$ de cadenas diferentes de par en par, crecientes y de longitud n.

2) Mostrar que el número de cadenas diferentes de par en par, crecientes, de longitud n, que contienen el vértice fijo $\tilde{\alpha}$ de B_k^n es igual a $k!\,(n-k)!$.

1.15.* 1) Mostrar que la potencia de cualquier subconjunto de colecciones incongruentes de par en par del cubo B^n no supera a $\binom{n}{[n/2]}$.

2) Mostrar que si el subconjunto $A \subseteq B^n$ está formado por colecciones incongruentes de par en par y $\|\tilde{\alpha}\| \leqslant k$ para cualquier $\tilde{\alpha} \in A$, entonces $|A| \leqslant \binom{n}{k}$ siempre que $k \leqslant \frac{n}{2}$.

1.16. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos diferentes de par en par y N, el conjunto de todes los números, presentados en la forma $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$. Sea el subconjunto $A \subset N$ tal, que ningún número $a \in A$ no es divisor de ningún número $b \in A$ diferente de a. Demostrar que $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

1.17. Supongamos que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son tales vértices del cubo B^n, que $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$. Mostrar que el número de colecciones $\tilde{\gamma}$, tales que $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}$, es igual a 2^k.

1.18.* Demostrar que el cubo B^n se puede presentar en forma de una unión de cadenas crecientes que no se intersecan de par en par y que poseen las propiedades siguientes:

1) el número de cadenas de longitud $n - 2k$ es igual a $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$, $k = \overline{0, [n/2]}$, y en este caso la colección mínima de cada cadena tal, tiene un peso k y la máxima, un peso $n - k$;

2) si $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_{i+1}$ y $\tilde{\alpha}_{i+2}$ son tres vértices consecutivos de una cadena creciente que tiene una longitud $n - 2k$, entonces el vértice $\tilde{\beta}$, tal que $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\beta} < \tilde{\alpha}_{i+2}$, $\tilde{\beta} \neq \tilde{\alpha}_{i+1}$, pertenece a cierta cadena de longitud $n - 2k - 2$.

1.19. Que sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ unos vértices del cubo B^n tales que $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$ y sea $C(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ el conjunto de todos los vértices $\tilde{\gamma}$ para los que existe una cadena $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ de longitud $k + 2r$ que contiene este vértice. ¿A qué es igual la potencia del conjunto $C(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$?

1.20. El conjunto $A \subseteq B^n$ se llama *completo en* B^n si cualquier vector $\tilde{\beta} \in B^n$ unívocamente se restablece si se da la condición de que para cada $\tilde{\alpha} \in A$ se conoce la distancia $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Un conjunto completo en B^n se llama *básico* si para cualquier vector $\tilde{\alpha}$ de A el conjunto $A \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ no es completo

1) Mostrar que cualquier cadena creciente $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}$ en B^n forma un conjunto básico.

2) Mostrar que los conjuntos B_1^n y B_{n-1}^n son completos en B^n si $n > 2$. Indicar un $n > 2$ tal que B_1^n no sea básico.

3) ¿Con qué valores de n y k el conjunto B_k^n no será completo en B^n?

4) Demostrar que cualquier conjunto básico A en B^n satisface la condición $\frac{n}{\log_2(n+1)} \leqslant |A| \leqslant n$.

5) Demostrar que ninguna cara de dimensión $n-2$ es un conjunto completo en B^n.

6) Mostrar que el número Ψ_n de conjuntos básicos en B^n satisface a las desigualdades $2\cdot(n!) \leqslant \Psi_n \leqslant \binom{2n}{n}$.

1.21. Sea φ la aplicación recíprocamente unívoca de B^n en sí mismo. Se dice que la aplicación φ *conserva la distancia entre los vértices*, si $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\varphi(\tilde{\alpha}), \varphi(\tilde{\beta}))$ para todos los $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ de B^n. Demostrar que la aplicación φ conserva la distancia si y solamente si, puede ser obtenida por medio de:

1) cierta permutación de las coordenadas, simultánea en todas las colecciones de B^n;

2) cambios de 0 por 1 y 1 por 0 en algunas coordenadas de todos los vectores.

1.22. La aplicación φ del conjunto B^n en sí mismo se llama *monótona* si de $\nu(\tilde{\alpha}) \leqslant \nu(\tilde{\beta})$, se deduce que $\nu(\varphi(\tilde{\alpha})) \leqslant \nu(\varphi)\tilde{\beta}))$. Hallar el número de aplicaciones monótonas del cubo B^n.

1.23. Sea $\tilde{\alpha} \in B^n_k$. El conjunto $M^n_k(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\gamma}: \nu(\tilde{\gamma}) \leqslant \nu(\tilde{\alpha}), \tilde{\gamma} \in B^n_k\}$ se llama *segmento inicial de la capa* B^n_k. Sea $A \subseteq B^n$; designaremos por $Z^n_l(A)$ el conjunto de colecciones $\tilde{\beta} \in B^n_l$ para los cuales existe tal $\tilde{\alpha} \in A$, que $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$.

1) Sea $\tilde{\alpha} \in B^n_k$ e $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ sean los números de las coordenadas del vector $\tilde{\alpha}$, iguales a la unidad. Mostrar que

$$|M^n_k(\tilde{\alpha})| = 1 + \binom{n-i_1}{k} + \binom{n-i_2}{k-1} + \ldots + \binom{n-i_k}{1}.$$

2) Mostrar que si $l \leqslant k$ y A es el segmento inicial de la capa B^n_k, entonces el conjunto $Z^n_l(A)$ será el segmento inicial de la capa B^n_l.

3) Sea $\tilde{\alpha} \in B^n_k$ y sean $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 \leq i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ los números de las coordenadas del vector $\tilde{\alpha}$ iguales a la unidad. Sea $A = M^n_k(\tilde{\alpha})$ y $l \leqslant k$. Mostrar que

$$|Z^n_l(A)| = 1 + \binom{n-i_1}{l} + \binom{n-i_2}{l-1} + \ldots + \binom{n-i_l}{1}.$$

4*) Sea $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{k}$. Demostrar que el mínimo de la magnitud $|Z^n_{k-1}(A)|$ en todos los $A \subseteq B^n_k$, tales que $|A| = m$, se alcanza en el segmento inicial de la capa B^n_k.

5) Sean $1 \leqslant m \binom{n}{k}$ y $l \leqslant k$. Demostrar que el mínimo de la magnitud $|Z^n_l(A)|$ en todos los $A \subseteq B^n_k$, tales que $|A| = m$, se alcanza en el segmento inicial de la capa B^n_k.

6) Que sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números dados para los cuales existe un tal conjunto A de colecciones incongruentes de par en par que $|A \cap B_k^n| = a_k$ $(k = \overline{0, n})$. Entonces el mínimo de la magnitud $|Z_l^n(A)|$ cogido por todos esos conjuntos A se alcanza en el caso de que para cualquier $i > l$ el conjunto $Z_i^n(A)$ sea segmento inicial de la capa B_i^n. Demostrar esto.

1.24*. Sea $A \subseteq B^n$ un conjunto de colecciones tal, que no existen colecciones $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ de A para las cuales $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} = \tilde{0}$, y $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. Sea $a_k = |A \cap B_k^n|$. Demostrar, que

$$a_{k+m}\Big/\binom{n}{k+m} + a_k\Big/\binom{n}{k} + a_m\Big/\binom{n}{m} \leqslant 2,$$

para todos los k, m naturales que no superen a n.

1.25. El conjunto $\Gamma(A) = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in B^n \setminus A, \rho(\tilde{\alpha}, A) = 1\}$ se llama *cota del subconjunto* $A \subset B^n$. Sean $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Designemos $A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ el conjunto de todas las colecciones de A en las que la coordenada con el número i_j es igual a σ_j $(j = \overline{1, k})$.

Llamaremos *centro del conjunto* A a una colección tal en la que la i-ésima coordenada es igual a 0, si $|A_0^i| \geqslant \frac{1}{2}|A|$, y es igual a 1 en el caso contrario. Designaremos por $\tilde{\alpha}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ la colección obtenida de $\tilde{\alpha}$ al cambiar las coordenadas que llevan los números $i_1, i_2, \ldots, i_k$ por las opuestas.

1) Mostrar que para todo $A \subseteq B^n$ existe un $A' \subseteq B^n$ tal que $|A'| = |A|$, $|\Gamma(A')| = |\Gamma(A)|$ y el centro de A' es el vértice $\tilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

2) Diremos que el conjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad I si para cualquier $i = \overline{1, n}$ de $\tilde{\alpha} \in A_1^i$ se deduce que $\tilde{\alpha}^i \in A$. Mostrar que para todo $A \subseteq B^n$ existe un conjunto A' con centro $\tilde{0}$, tal, que $|A'| = |A|$, A' posee la propiedad I y $|\Gamma(A')| \subseteq |\Gamma(A)|$.

3) Diremos que el conjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad II, si para cualesquiera i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ de $\tilde{\alpha} \in A_{10}^{i,j}$ se deduce que $\tilde{\alpha}^{i,j} \in A$. Mostrar que para cualquier A con centro $\tilde{0}$ que posea la propiedad I existe un A' con el centro en $\tilde{0}$ que posee las propiedades I y II y que es tal, que $|A| = |A'|$, $|\Gamma(A')| \leqslant |\Gamma(A)|$.

4*) Mostrar, que el min $|\Gamma(A)|$ por todos los $A \subseteq B^n$, es tal que $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} < |A| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$, se alcanza en el conjunto $A = S_{k-1}^n(\tilde{0}) \cup M_k^n(\tilde{\alpha})$, donde $M_k^n(\tilde{\alpha})$ es un cierto segmento final de la capa B_k^n (véase el problema 1.23).

1.26. Que sea $\varphi(n)$ $(\varphi'(n))$ la potencia máxima del conjunto $A \subseteq B^n$, tal, que $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| = 1$ (correspondientemente $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| \geqslant$

$\geqslant 1$) para dos cualesquiera diferentes vectores de A. Mostrar que: 1) $\varphi(n) = n$; 2) $\varphi'(n) = 2^{n-1}$.

1.27. Sea $F(n, k)$ una familia de subconjuntos A del conjunto B^n, tales que $\| \tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} \| \geqslant k$, para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de A. Sea $\varphi(n, k) = \max\limits_{A \in F(n, k)} |A|$. Demostrar las siguientes afirmaciones

1) $\varphi(n, k) \geqslant \sum\limits_{i+]\frac{n+k+1}{2}[}^{n} \binom{n}{i}$.

2) Sea $A \subset F(n, k)$; entonces $|A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| \leqslant \binom{n}{l}$.

3) Si $l \geqslant \frac{n+k+1}{2}$, la igualdad $|A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| = \binom{n}{l}$ se alcanzará solamente en el caso de que $A \cap B_{n-l+k-1}^n = \varnothing$.

4) $\varphi(n, k) = \sum\limits_{i=\frac{n+k+1}{2}}^{n} \binom{n}{i}$ si $n+k$ es impar, $\varphi(n, k) = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} + \sum\limits_{i=\frac{n+k}{2}+1}^{n} \binom{n}{i}$ si $n+k$ es par.

1.28. Sea $F_r(n)$ una familia de subconjuntos $A \subseteq B^n$ tales que $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 2r$ para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de A. Sea $\varphi_r(n) = \max\limits_{A \in F_r(n)} |A|$.

1*) Mostrar que el máximo $|A|$ por todos los $A \in F_r(n)$ se alcanza en los conjuntos de la forma $S_r^n(\tilde{\alpha})$ y es igual a $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n}{k}$.

2) Para un n impar y $r = \frac{n-1}{2}$, dar un ejemplo de un conjunto $A \in F_r(n)$ que no sea una bola de radio r, para la cual $|A| = \varphi_r(n)$.

1.29*. Diremos que el subconjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad I, si cualesquiera dos vectores de A tienen una coordenada unidad común, posee la propiedad II, si para cualquier $\tilde{\alpha} \in A$ el vector opuesto $\tilde{\bar{\alpha}}$ no descansa en A y, por fin, posee la propiedad III, si de $\tilde{\alpha} \in A$ y $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ se deduce que $\tilde{\beta} \in A$. Sea $\psi(n)$ el número de subconjuntos $A \subseteq B^n$ que poseen simultáneamente las propiedades I y II, y $\varphi(n)$ el número de subconjuntos $A \subseteq B^n$ que poseen la propiedad III. Mostrar que:

1) $\psi(n) \geqslant 2^{\binom{n-1}{[(n-1)/2]}}$; 2) $\psi(n) \leqslant \varphi^2(n-1)$.

1.30. Sea $A \subset B^n$; $R(A)$, el número de aristas $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, tales que $\tilde{\alpha} \in A$, $\tilde{\beta} \in B^n \setminus A$. Mostrar que $|R(A)| \geqslant$ mín $\{|A|, 2^n - |A|\}$.

1.31. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1) El número de las diferentes caras de dirección fija $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ es igual a 2^k.

2) Dos caras diferentes de una misma dirección no se intersecan.

3) La unión de todas las caras del cubo B^n que tienen una dirección dada, da como resultado todo el cubo.

4) El número de todas las caras de rango k del cubo B^n es igual a $\binom{n}{k} \cdot 2^k$.

5) El número total de caras del cubo B^n es igual a 3^n.

6) El número de caras de dimensión k, que contienen el vértice $\tilde{\alpha}$ dado, es igual a $\binom{n}{k}$.

7) El número de caras de dimensión k, que contienen la cara dada de dimesión l, es igual a $\binom{n-l}{k-l}$.

8) El número de caras k-dimensionales que se intersecan con la cara l-dimensional dada, del cubo B^n, es igual a

$$\sum_{j=0}^{\min(k, l)} \binom{l}{j} 2^{l-j} \binom{n-l}{k-j}.$$

1.32. *Intervalo del cubo* B^n, se llama al conjunto de la forma $\{\tilde{\gamma}: \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}\}$, donde $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son ciertos vértices tales, que $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$. El número $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ se llama *dimensión del intervalo*. Mostrar que una cara de dimensión k es un intervalo de dimensión k.

1.33. Sean g_1, g_2, g_3, caras del cubo B^n. Mostrar que de $g_1 \cap g_2 \neq \varnothing$, $g_2 \cap g_3 \neq \varnothing$, $g_3 \cap g_1 \neq \varnothing$, se deduce que $(g_1 \cap g_2) \cap g_3 \neq \varnothing$.

1.34. Sean $n_1, n_2, \ldots, n_s$, unos números enteros y no negativos tales, que $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} \leqslant 2^n$. Entonces en B^n existen unas caras $g_1, g_2, \ldots, g_s$, de las que se forman pares de caras que no se intersecan y que tienen una dimensión igual a $n_1, n_2, \ldots, n_s$ respectivamente. Demostrar esto.

1.35. Las caras g_1 y g_2 del cubo B^n se llaman *incomparables* si no se cumple ninguna de las incluisones $g_1 \subseteq g_2$, $g_2 \subseteq g_1$.

1) Mostrar que existe un conjunto de caras del cubo B^n formado por $\binom{n}{[n/3]} \binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ caras incongruentes de par en par.

2) Mostrar que la potencia de cualquier conjunto de caras del cubo B^n incongruentes de par en par no supera a $\binom{n}{[n/3]} \times 2^{n-[\frac{n}{3}]}$.

1.36. Sea $L(n, k)$ el número mínimo de vértices de B^n tales, que en cada cara k-dimensional haya aunque sea uno solo de estos vértices. Demostrar que:

1) $L(n, 1) = 2^{n-1}$;
2) $L(n, n-1) = 2$;
3) $L(n, 2) \leqslant]2^n/3[$;
4*) $m \leqslant L(n, n-2) \leqslant m+2$, donde m es el menor número entero para el cual $\binom{m}{]m/2[} \geqslant n$;
5) $L(n, k-1) \leqslant \sum_{i=0}^{[n/k]} \binom{n}{ki}$;
6) $L(n, k) \geqslant 2^{n-r} L(r, k)$, $k \leqslant r \leqslant n$.

1.37. Mostrar que las colecciones de B^n se pueden disponer en una sucesión $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n}$ tal, que es un ciclo.

1.38. Demostrar que en B^n no hay ciclos de longitud impar.

1.39. Al vector binario $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ lo llamaremos *n-universal*, si para cualquier vector $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ de B^n existe tal número k, que $\beta_i = \alpha_{k \oplus i}$ $(i = \overline{0, n-1})$, donde $k \oplus i = k + i \pmod N$. Aclarar si es el vector $\tilde{\alpha}$ n-universal en el caso de que:

1) $\tilde{\alpha} = (0011)$, $\quad n = 2$;
2) $\tilde{\alpha} = (01011)$, $\quad n = 2$;
3) $\tilde{\alpha} = (00110)$, $\quad n = 2$;
4) $\tilde{\alpha} = (00011101)$, $\quad n = 3$.

1.40. Demostrar que para todo n natural existe un vector n-universal de longitud 2^n y no existen vectores n-universales de longitud menor que 2^n.

1.41. El ciclo Z del cubo B^n se llama *2d-ciclo* si $|Z \cap S_d^n(\tilde{\alpha})| = 2d + 1$ para todos los $\tilde{\alpha} \in Z$, o sea, si para cualquier vértice $\tilde{\alpha}$ del ciclo Z el conjunto de los vértices del ciclo, que se encuentran a una distancia no mayor que d (por el cubo), coincide con el conjunto de los vértices que se encuentran a una distancia no mayor de d «a lo largo del ciclo».

1) Sea $l(n)$ la longitud máxima de 2-ciclo en B^n. Hallar $l(n)$ para $n = \overline{2, 5}$.

2) Sea Z 2-ciclo en B^n. Mostrar que en cualquier cara de dimensión 4 hay no más de ocho vértices del 2-ciclo Z.

3*) Mostrar que la longitud máxima de un 2-ciclo en B^n no es mayor que 2^{n-1}, $n > 3$.

1.42. El par $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$ que está compuesto de dos vértices consecutivos del ciclo Z del cubo B^n se llama *arista del ciclo*. Mostrar que en B^5 existe un ciclo de longitud 32, en el que cualesquiera cuatro aristas consecutivas tienen, de dos en dos, direcciones diferentes.

1.43. Sean $a_1, \ldots, a_n$, números tales que $a_i > 2\,(i=\overline{1, n})$. Mostrar que el número de las sumas $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i=\overline{1, n}$, que satisfacen la condición $\left|\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i\right| \leqslant 1$, no supera a $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

1.44. Sea $A \subseteq B^n$, $|A| > 2^{n-1}$. Mostrar que existe no menos de n aristas del cubo que se contienen por entero en A.

§ 2. FORMAS DE EXPRESION DE LAS FUNCIONES DE BOOLE. FUNCIONES ELEMENTALES. FORMULAS. OPERACION DE SUPERPOSICION

Designaremos por $\widetilde{x}^n$ (o $\widetilde{x}$) una colección de símbolos variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y por X^n, un conjunto de esos mismos símbolos variables. La función $f(\widetilde{x}^n)$ definida sobre el conjunto B^n y que toma sus valores del conjunto $\{0, 1\}$ se llama *función del álgebra de la lógica* o *función booleana*. Designaremos por $P_2(X^n)$ el conjunto de todas las funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se puede presentar con una tabla $T(f)$ (véase la tabla 1). Aquí las colecciones $\widetilde{\sigma}$ están colocadas en

Tabla 1

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,$	$x_2,$	$\ldots,$	$x_{n-1},$	$x_n)$
0	0		0	0	$f(0$	0		0	0)
0	0		0	1	$f(0$	0		0	1)
0	0		1	0	$f(0$	0		1	0)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	1		1	1	$f(1$	1		1	1)

el orden de crecimiento de sus números. En lo sucesivo, suponiendo una colocación estándard de las colecciones, presentaremos la función $f(\widetilde{x}^n)$ por medio del vector $\widetilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$ en el cual la coordenada α_i representa en sí el valor de la función $f(\widetilde{x}^n)$ sobre la colección $\widetilde{\sigma}$ con el número i $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$.

Por el símbolo N_f designaremos el conjunto $\{\widetilde{\sigma}: (\widetilde{\sigma} \in B^n)\ \&\ \&\ (f(\widetilde{\sigma}) = 1)\}$.

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ puede ser también dada con una tabla rectangular $\Pi_{k,n-k}(f)$ (véase la tabla 2) en la cual los valores

Tabla 2

				0	0	...	σ_{k+1}	...	1	x_{k+1}
				0	0	...	σ_{k+2}	...	1	x_{k+2}
				. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
x_1	x_2	...	x_k	0	1	...	σ_n	...	1	x_n
0	0	...	0				⋮			
0	0	...	1							
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	$f(\widetilde{\sigma})$			
σ_1	σ_2	...	σ_k							
. . .	. . .	. . .	. . .							
1	1	...	1							

$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de la función f están colocados en la intersección de la «fila» $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ con la «columna» $(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n)$, $1 \leqslant k < n$.

Las funciones booleanas dadas en las tables 3 y 4 se considerarán

Tabla 3

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Tabla 4

x_1	x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

elementales.

Citaremos las designaciones y los nombres de estas funciones.

1) Las funciones 0 y 1 se llaman correspondientemente *idéntica a cero* e *idéntica a la unidad*.

2) La función f_1 se llama *función idéntica* y se designa por x.

3) La función f_2 se llama *negación de* x, se designa $\bar{x}$ o $\neg x$ y con frecuencia se lee «*no* x».

4) La función f_3 se llama *conjunción de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \& \& x_2$ o $x_1 \cdot x_2$ o $x_1 x_2$ o $\min(x_1, x_2)$ y con frecuencia se lee «x_1 y x_2».

5) La función f_4 se llama *disyunción de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \vee x_2$ o $x_1 + x_2$ o $\max(x_1 x_2)$ y con frecuencia se lee «x_1 o x_2».

6) La función f_5 se llama *suma por el módulo* 2 de x_1 y x_2, se designa $x_1 \oplus x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *más* x_2».

7) La función f_6 se llama *equivalencia de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \sim \sim x_2$ o $x_1 \leftrightarrow x_2$ o $x_1 \equiv x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *es equivalente a* x_2».

8) La función f_7 se llama *implicación de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \rightarrow \rightarrow x_2$ o $x_1 \supset x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *implica a* x_2».

9) La función f_8 se llama *raya* u *operación de Sheffer de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \mid x_2$ y con frecuencia se lee «*no* x_1 y x_2».

10) La función f_9 se llama *flecha* u *operación de Peirce de* x_1 *y* x_2 se designa $x_1 \downarrow x_2$ y con frecuencia se lee «*no* x_1 *o* x_2».

Algunas veces las funciones 0 y 1 se consideran como funciones dependientes de un conjunto vacío de variables.

Los símbolos $\neg$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, etc. que se emplean en las designaciones de las funciones elementales se llaman *enlaces lógicos*.

Fijemos cierto *alfabeto de variables* X (finito o contable-infinito). Supongamos que $\Phi = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$ es un conjunto de *símbolos funcionales* en donde los índices superiores indican los *lugares* («*arnost*») de los símbolos. Algunas veces los índices superiores se omiten pero entonces se supone que se conoce el «arnost» de los símbolos funcionales.

DEFINICIÓN 1. *Fórmula sobre el conjunto* Φ se llama a cualquier (y sólo a una tal) expresión de los tipos siguientes:

1) f_k y $f_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, en donde f_k y f_j son símbolos funcionales de cero lugares y de n lugares respectivamente y $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots \ldots, x_{i_n}$ son las variables del conjunto X;

2) $f_m(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s)$, en donde f_m es un símbolo funcional de s lugares y $\mathfrak{A}_i$ es una fórmula sobre Φ o bien una variable de X, $i = \overline{1, s}$.

Para agudizar la atención en que en la fórmula $\mathfrak{A}$ entran *sólo variables de* X (o *sólo símbolos funcionales de* Φ) anotaremos $\mathfrak{A}(X)$ (y respectivamente $\mathfrak{A}[\Phi]$).

Algunas veces se anotan las fórmulas del tipo $f(x, y)$ en forma de (xfy) o bien xfy, y la fórmula $f(x)$, en forma de (fx) o fx. En estos casos al símbolo f lo llaman *enlace*.

Generalmente se emplean en calidad de enlaces los símbolos del conjunto $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, \mid, \downarrow\}$.

DEFINICIÓN 2. Se llama *fórmula sobre* $\mathfrak{S}$ a toda (y sólo a una tal) expresión de los tipos siguientes:

1) x es una variable cualquiera del conjunto X;

2) $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \downarrow \mathfrak{B})$, en donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fòrmulas sobre $\mathfrak{S}$.

Usualmente se aceptan los siguientes acuerdos para la reducción de la escritura de las fórmulas sobre el conjunto de los enlaces $\mathfrak{S}$:

a) se omiten los paréntesis exteriores de las fórmulas;

b) la fórmula $(\neg \mathfrak{A})$ se escribe en la forma de $\overline{\mathfrak{A}}$;

c) la fórmula $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ se anota en la forma $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ o $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$;

d) se considera que el enlace $\neg$ es *más fuerte* que cualquier enlace de dos lugares de $\mathfrak{S}$;

e) el enlace & se considera *más fuerte* que cualquiera de los enlaces $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\rightarrow$, $\mid$, $\downarrow$.

Estos acuerdos permiten, por ejemplo, escribir la fórmula $((\neg x) \rightarrow ((x \& y) \vee z))$ en la forma $\bar{x} \rightarrow (xy \vee z)$.

Se emplean también escrituras *mixtas* de las fórmulas, por ejemplo, $x \oplus f(y, z)$ o $x_1 f(x_2, 0, x_3) \vee \overline{x_1} f(1, \bar{x}_2, x_3)$.

Supongamos que a cada símbolo funcional $f_i^{(n_i)}$ del conjunto Φ se la coteja cierta función F_i: $B^{n_i} \rightarrow B$. El concepto de *función* $\varphi_{\mathfrak{A}}$ *que se realiza con la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto* Φ se determina por inducción:

1) si $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, entonces para toda colección $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$ de valores de las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$ el valor de la función $\varphi_{\mathfrak{A}}$ será igual a $F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$;

2) si $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$, en donde $f \in \Phi$, $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k(y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k})$ es una fórmula sobre Φ o una variable de X y en toda colección $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{ks_k})$ de los valores de las variables $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k}$ la función $\varphi_{\mathfrak{A}_k}$ igual a $\beta_k (k = \overline{1, m})$, entonces,

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1s_1}, \ldots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_{ks_k}, \ldots, \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{ms_m}) =$$

$$= F(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_m)$$

(aquí F es la función cotejada al símbolo funcional f).

Si $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, entonces $\varphi_{\mathfrak{A}}$ se designa corrientemente for $F_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$. Pero si $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$

entonces $\varphi_{\mathfrak{A}}$ se designa por $F[\varphi_{\mathfrak{A}_1}(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1s_1}), \ldots$ $\ldots, \varphi_{\mathfrak{A}_m}(y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{ms_m})]$.

El concepto de *función* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *realizado por medio de la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto de enlaces* $\mathfrak{S}$, se introduce de la manera siguiente:

1) a la fórmula $\mathfrak{A} = x$, en donde $x \in X$, se le coteja una función idéntica $\varphi_{\mathfrak{A}}(x) = x$;

2) si $\mathfrak{A} = (\neg\mathfrak{B})$ (o $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \bigcirc \mathfrak{C})$, en donde $\bigcirc \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, |, \downarrow\}$), entonces $\varphi_{\mathfrak{A}} = \overline{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ (respectivamente $\varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{B}} \bigcirc \varphi_{\mathfrak{C}}$, habiendo que entender el símbolo $\bigcirc$ como la designación de la función booleana elemental correspondiente; véanse las tablas 3 y 4).

Supongamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de las variables que se encuentran aunque sea en una de las fórmulas $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$. Las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se llaman *equivalentes* (se designan $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), si en cualquier colección $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coinciden los valores de las funciones $\varphi_{\mathfrak{A}}$ y $\varphi_{\mathfrak{B}}$ que se realizan con las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente.

Sea Φ un conjunto de símbolos funcionales (o de enlaces lógicos) y P, un conjunto de funciones que les corresponden. Se llama *superposición sobre el conjunto* P a toda función F que pueda realizarse por medio de una fórmula sobre el conjunto Φ.

2.1. ¿Cuál será el número de funciones en $P_2(X^n)$ que tomen en colecciones opuestas los mismos valores?

2.2. Hallar el número de funciones en $P_2(X^n)$ que en cualquier par de colecciones adyacentes toman valores opuestos.

2.3. ¿Cuál es el número de funciones en $P_2(X^n)$ que toman el valor 1 en menos de k colecciones de B^n?

2.4. Construir en vectores la función h, por las funciones $f(x_1, x_2)$ y $g(x_3, x_4)$ dadas en forma vectorial:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$, $h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2)$;

2) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$, $h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \vee g(x_3, x_4)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1000)$, $\tilde{\alpha}_g = (0111)$, $h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \& g(x_3, x_4)$.

2.5. Que sea ν_1 un número, cuya descomposición binaria constituye la colección (x_1, x_2) y ν_2 un número cuya descomposición binaria es (x_3, x_4). Sea $f_i(\tilde{x}^4)$ el i-ésimo orden de la descomposición binaria del número $|\nu_1 - \nu_2|$, $i = 1, 2$. Construir la tabla rectangular $\Pi_{2,2}$ de las funciones $f_1(\tilde{x}^4)$ y $f_2(\tilde{x}^4)$.

2.6. 1) La función $f(\tilde{x}^3)$ se determina de la siguiente manera: es igual a 1 si $x_1 = 1$, o bien si las variables x_2 y x_3 adquieren distintos valores y el valor de la variable x_1 es menor que el valor de la variable x_3; en el caso contrario la función se hace cero. Componer las tablas $T(f)$ y $\Pi_{1,2}(f)$ de la función $f(\tilde{x}^3)$ y escribir las colecciones del conjunto N_f.

2) La función $f(\tilde{x}^4)$ se da de la siguiente forma: es igual a cero sólo en las colecciones $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ para las cuales la desi-

gualdad $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$ es verídica. Construir la tabla $T(f)$ y escribir las colecciones del conjunto N_f de esta función.

2.7. La función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *simétrica* si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ con cualquier sustitución $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix}$.

2) Mostrar que si $f(\widetilde{x}^4)$ es una función simétrica, entonces de la igualdad $\|\widetilde{\alpha}^n\| = \|\widetilde{\beta}^n\|$ se deduce la igualdad $f(\widetilde{\alpha}^n) = f(\widetilde{\beta}^n)$.

2) Hallar el número de funciones simétricas que hay en $P_2(X^n)$.

2.8. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función arbitraria del álgebra lógica ($n \geqslant 1$). Le cotejaremos la función simétrica $S(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, en donde $m = 2^n - 1$: $S(\widetilde{\alpha}^m) = f(\widetilde{\beta}^n)$, si $\|\widetilde{\alpha}^m\| = \nu(\widetilde{\beta}^n)$. Demostrar que

$$S(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{2^{n-1}\text{ veces}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{2^{n-2}\text{ veces}}, \ldots, \underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{2^{n-i}\text{ veces}}, \ldots, \underbrace{x_{n-1}, x_{n-1}}_{2\text{ veces}}, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

2.9. Aclarar cual de las expresiones que se exponen a continuación son fórmulas sobre el conjunto de enlaces lógicos $\{\neg, \&, \vee, \to\}$

1) $x \to y$;
2) $(x \,\&) \neg y$;
3) $(x \leftarrow y)$;
4) $(y \to (x))$;
5) $(x \to (y \,\& (\neg x)))$;
6) $(x \,\& y) \neg z$;
7) $(\neg x \to z)$.

2.10. Aclarar de cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión A para que cada vez resulte una fórmula sobre el conjunto de enlaces lógicos $\{\neg, \&, \vee, \to\}$, si:

1) $A = \neg x \to y \,\& S$;
2) $A = x \,\& y \,\& \neg\neg z \vee x$;
3) $A = x \to \neg y \to z \,\& \neg x$.

2.11. Llamaremos *complejidad de la fórmula* sobre el conjunto de enlaces lógicos $\mathfrak{S}$ al número de enlaces en ella. Demostrar por la complejidad de la fórmula a base de inducción que en una fórmula

1) de complejidad no cero se contiene por lo menos un par de paréntesis;

2) el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos;

3) no hay dos enlaces que estén juntos;

4) no hay dos símbolos de variables que estén juntos.

2.12. Llamaremos *índice del enlace en la fórmula* a la diferencia entre el número de paréntesis izquierdos que preceden al enlace examinado en la fórmula dada y el número de paréntesis derechos que preceden a este mismo enlace. Demostrar que cualquier fórmula de una complejidad no cero sobre el conjunto $\{\neg, \&, \vee, \to\}$,

1) contiene un único enlace de índice 1;

2) puede ser presentada de una sola manera en una de las siguientes formas: $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, en donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas sobre el conjunto $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$.

2.13. Examinemos una anotación sin paréntesis de fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$; en lugar de $(\neg x)$, $(x \,\&\, y)$, $(x \vee y)$ y $(x \rightarrow y)$, escribiremos $\neg\, x$, $\&\, xy$, $\vee\, xy$, $\rightarrow xy$. Por ejemplo, la fórmula $((\neg x) \rightarrow (y \vee (\neg z)))$ se representará $\neg \rightarrow x \vee y \neg z$. Demostrar que si cada uno de los enlaces $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ se evalúa con el número $+1$; cada símbolo variable, con el número -1 y el enlace $\neg$, con cero, entonces, en la anotación sin paréntesis de la expresión A habrá una fórmula si, y sólo si, la suma de las evaluaciones de todas las entradas de los símbolos en A es igual a -1 y en cada segmento inicial de la expresión A esta suma es no negativa.

2.14. Aclarar si la expresión A es una fórmula sobre el conjunto Φ, en el caso de que:

1) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(x, y), f^{(2)}(x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
2) $A =)x(\varphi^{(1)}$, $\Phi = \{g^{(1)}, \varphi^{(1)}\}$;
3) $A = \varphi^{(1)}(f^{(2)}(1, x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
4) $A = g^{(2)}(\varphi^{(1)}, f^{(3)}, (x, y, \varphi^{(1)}))$, $\Phi = \{f^{(3)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
5) $A = (\varphi^{(1)}(f^{(2)}\, x, \varphi^{(1)}(x))))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$.

2.15. Hallar el vector $\tilde{\alpha}_\varphi$ de la función φ que realiza la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\Phi = \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, g^{(2)}\}$ si a los símbolos funcionales $f_1^{(1)}$, $f_2^{(2)}$, $g^{(2)}$ se les comparan las funciones booleanas determinadas respectivamente por los vectores (10), (1011) y (1000):

1) $\mathfrak{A} = f_2^{(2)}(f_1^{(1)}(g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y))), y)$;
2) $\mathfrak{A} = g^{(2)}(f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, y)), g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y)))$;
3) $\mathfrak{A} = f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, g^{(2)}(f_2^{(2)}(x, y), f_1^{(1)}(y))))$.

2.16. Construir las tablas de las funciones realizables con las fórmulas siguientes (sobre el conjunto de enlaces $\mathfrak{S}$):

1) $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$;
2) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$;
3) $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$;
4) $(((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$.

2.17. Una fórmula sobre el conjunto $\mathfrak{S}$ se llama *idénticamente verdadera* (*idénticamente falsa*) si la función que la realiza es igual a 1 (o, respectivamente, a cero) en toda colección de valores de las variables. Aclarar cuál de las fórmulas indicadas a continuación es idénticamente verdadera o idénticamente falsa:

1) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \vee z) \rightarrow (y \vee z))$;
2) $((x \oplus y) \sim z)\,(x \rightarrow yz)$;
3) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (x \oplus \bar{y})) \oplus (\overline{x \rightarrow \bar{y}} \rightarrow (\bar{x} \vee y))$;
4) $((x \vee \bar{y})\, z \rightarrow ((x \sim z) \oplus y))\,(x\,(yz))$.

2.18. ¿Son equivalentes las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

1) $\mathfrak{A} = ((x \vee y) \vee z) \rightarrow ((x \vee y)(x \vee z))$, $\mathfrak{B} = x \sim z$;
2) $\mathfrak{A} = (x \rightarrow y) \rightarrow z$, $\mathfrak{B} = x \rightarrow (y \rightarrow z)$;
3) $\mathfrak{A} = ((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$, $\mathfrak{B} = x \mid y$;
4) $\mathfrak{A} = \overline{(x \rightarrow y) \vee ((x \rightarrow z)\, y)}$, $\mathfrak{B} = (x\bar{y})(\bar{y} \rightarrow x\bar{z})$.

2.19. Hallar todas las funciones dependientes sólo de las variables del conjunto $\{x, y\}$ y que son superposiciones sobre el conjunto P:

1) $P = \{u_1 \oplus u_2, 1\}$;
2) $P = \{u_1 u_2 \oplus (u_1 \vee u_2)\}$;
3) $P = \{f(u_1, u_2) = (1101),\ g(u_1, u_2, u_3) = (10010110)\}$ [1]).

2.20. *La profundidad de la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto* Φ (se designa $\text{dep}_\Phi(\mathfrak{A})$) se determina por inducción:

(I) si $\mathfrak{A}$ es un símbolo variable o un símbolo funcional de cero lugares, entonces $\text{dep}_\Phi \mathfrak{A} = 0$;

(II) si $\mathfrak{A} = f^{(n)}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, en dondo $f^{(n)} \in \Phi$, entonces,

$$\text{dep}_\Phi(\mathfrak{A}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{dep}_\Phi(\mathfrak{A}_i) + 1.$$

Hallar la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\{\downarrow\}$ que tenga una profundidad mínima y que realice la función:

1) $f = x \vee y$; 2) $f = x \oplus y$; 3) $f = xy$.

2.21. Aclarar si se puede realizar la función f con la fórmula $\mathfrak{A}$ de profundidad k sobre el conjunto de enlaces S en los casos siguientes:

1) $f = xy$, $k = 2$, $S = \{\mid\}$;
2) $f = x \rightarrow y$, $k = 3$, $S = \{\vee, \sim\}$;
3) $f = x \oplus y \oplus z$, $k = 2$, $S = \{\rightarrow, \&\}$.

2.22. Demostrar que la función f no puede ser realizada con una fórmula sobre el conjunto de enlaces S cuando:

1) $f = x \oplus y$, $S = \{\&\}$;
2) $f = x \cdot y$, $S = \{\rightarrow\}$;
3) $f = x \vee y$, $S = \{\sim\}$.

2.23. ¿Se puede realizar la función f con una fórmula de profundidad $k + 1$ sobre el conjunto S si ella es realizable con una fórmula de profundidad k sobre ese mismo conjunto S?

2.24. La función f de P_2 es realizable con una fórmula de profundidad k sobre el conjunto S. Mostrar que la función f puede ser realizada sobre ese mismo conjunto S con cierta fórmula cuya profundidad será mayor que k.

Al operar con las funciones de álgebra lógica son con frecuencia útiles las siguientes equivalencias (las que en lo sucesivo se llamarán *equivalencias básicas*):

---

[1]) Aquí y en lo sucesivo en la presentación vectorial de una función en lugar de la anotación $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\beta}$ emplearemos la anotación $f = \tilde{\beta}$.

$x \bigcirc y = y \bigcirc x$ (conmutatividad de los enlaces $\bigcirc$, en donde el símbolo $\bigcirc$ representa la designación general de los enlaces &, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $|$, $\downarrow$);

$(x \bigcirc y) \bigcirc z = x \bigcirc (y \bigcirc z)$ (asociatividad de los enlaces $\bigcirc$, en donde $\bigcirc$ es la designación general para los enlaces &, $\vee$, $\oplus$ $\sim$);

$\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ y $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ (regla de Morgan);

$x \vee (x \,\&\, y) = x$ y $x \,\&\, (x \vee y) = x$ (regla de la absorción);

$x \vee (\bar{x} \,\&\, y) = x \vee y$ y $x \,\&\, (\bar{x} \vee y) = x \,\&\, y$;

$x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ (distributividad de la conjunción con relación a la disyunción);

$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ (distributividad de la disyunción con relación a la conjunción);

$x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$ (distributividad de la conjunción con relación a la suma por módulo 2);

$$0 = x \,\&\, \bar{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x;$$

$$1 = x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \sim x;$$

$$x = \bar{\bar{x}} = x \vee x = x \,\&\, x = x \,\&\, 1 = x \vee 0;$$

$$\bar{x} = x \oplus 1, \; x \sim y = (x \oplus y) \oplus 1;$$

$$x \oplus y = (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y), \; x \to y = ((x \,\&\, y) \oplus x) \oplus 1.$$

2.25. Comprobar si son justas las relaciones siguientes:

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
3) $x \& (y \sim z) = (x \& y) \sim (x \& z)$;
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
5) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$;
6) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;
7) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

2.26. Realizar la función f con una fórmula sobre el conjunto de enlaces S si:

1) $f = x \to y$, $S = \{\neg, \vee\}$;
2) $f = x \vee y$, $S = \{\to\}$;
3) $f = x \sim y$, $S = \{\&, \to\}$;
4) $f = x \mid y$, $S = \{\downarrow\}$.

2.27. Demostrar, empleando las equivalencias básicas, la equivalencia de las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en los casos en que:

1) $\mathfrak{A} = \overline{(\bar{x} \,\&\, \bar{z}) \vee (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \bar{z})}$, $\mathfrak{B} = x \,\&\, \overline{y \,\&\, z} \vee \bar{x} \,\&\, z$;

2) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to ((x \,\&\, \bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y}))$, $\mathfrak{B} = (x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) $\mathfrak{A} = x \to (x \,\&\, y) \to ((x \to y) \to y) \,\&\, z)$, $\mathfrak{B} = y \to (x \to z)$.

2.28. Demostrar que la fórmula $\mathfrak{A}$ es equivalente a la fórmula $\mathfrak{B}$ si, y sólo si, es idénticamente verdadera exactamente una de las fórmulas

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \neg (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})).$$

2.29. Demostrar que una fórmula $\mathfrak{A}$ que contenga sólo el enlace $\sim$ es idénticamente verdadera si, y sólo si, cualquier variable que esté contenida en la fórmula $\mathfrak{A}$ entra en ella un número de veces par.

2.30. Por $S^x_{\mathfrak{C}}\mathfrak{A}\,|$ se designa la fórmula que se obtiene de la fórmula $\mathfrak{A}$ por medio de una sustitución simultánea de cada entrada de la variable x en la fórmula $\mathfrak{C}$. Si x no entra en la fórmula $\mathfrak{A}$, entonces (por definición) se supone que $S^x_{\mathfrak{C}}\mathfrak{A}\,| = \mathfrak{A}$.

1) Demostrar que $\mathfrak{A}$ es una fórmula idénticamente verdadera si, y sólo si, es idénticamente verdadera la fórmula $S^x_{y_1 \to y_2}\mathfrak{A}\,|$, en donde y_1 e y_2 son algunas variables que no entran en la fórmula $\mathfrak{A}$.

2) ¿Se puede excluir en 1) la condición de que y_1 e y_2 no entran en la fórmula $\mathfrak{A}$?

2.31. 1) Supongamos que la función $f(x, y)$ de P_2 satisface la relación

$$f(f(x, f(y, z)), f(f(x, y), f(x, z))) \equiv 1.$$

Demostrar que entonces serán justas las siguientes equivalencias:

a) $f(x, x) \equiv 1$;
b) $f(x, f(y, x)) \equiv 1$;
c) $f(f(f(x, y), f(x, z)), f(x, f(y, z))) \equiv 1$;
d) $f(f(x, y), f(f(x, f(y, z)), f(x, z))) \equiv 1$;
e) $f(f(x, f(y, z)), f(y, f(x, z))) \equiv 1$.

2) ¿Se deducen las equivalencias b), c) y d) de la equivalencia e)?

§ 3. TIPOS ESPECIALES DE FORMULAS. FORMAS NORMALES DISYUNTIVAS Y CONJUNTIVAS. POLINOMIOS

La fórmula $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$ (la fórmula $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$), en donde $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para todos los $k = \overline{1, r}$, se llama *conjunción* (respectivamente, *disyunción*) *sobre el conjunto de variables* $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La conjunción (disyunción) se llama *elemental* (o abreviadamente c.e. y d.e.) si $x_{i_j} \neq x_{i_k}$, para $j \neq k$. Los símbolos $\&$ en la c.e. serán omitidos para reducir la escritura. Las expresiones del tipo $x_{i_k}^{\sigma_k}$ se llamarán *letras*. Llamaremos *rango* de la c.e. (d.e.) al número de letras en la c.e. (d.e.). La constante 1 se considerará c.e. de rango cero y el cero, d.e. de rango cero.

La fórmula del tipo

$$\mathscr{D} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s \tag{1}$$

(su notación abreviada es $\bigvee_{i=1}^{s} K_i$), donde K_i $(i = \overline{1, s})$ son conjunciones, se llama *forma normal disyuntiva* (abreviado f.n.d.).

La fórmula del tipo

$$\mathscr{K} = D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_s \tag{2}$$

(su notación abreviada es $\mathop{\&}_{i=1}^{s} D_i$), donde D_i $(i = \overline{1, s})$ son conjunciones, es llama *forma normal conjuntiva* (abreviado f.n.c.). El número s se llama *longitud de la f.n.d.* (*longitud de la f.n.c.*). La suma de los rangos de las conjunciones (disyunciones) se llama *complejidad de la f.n.d.* (*complejidad la f.n.c.*). La forma disyuntiva normal (la forma conjuntiva normal) sobre un conjunto de variables $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se llama *perfecta* si está compuesta de par en par por diferentes conjunciones elementales (disyunciones elementales) de un rango n.

Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función booleana y sea $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Mediante $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ o a veces por $S_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} f(\widetilde{x}^n)|$, designaremos la función obtenida de $f(\widetilde{x}^n)$ sustituyendo en el lugar de las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ las constantes correspondientes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. La función $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ se llama $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$-*componente de la función* $f(\widetilde{x}^n)$ o *subfunción* de $f(\widetilde{x}^n)$. La subfunción $f_{\sigma_1\sigma_1\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ se llama *propia* si $k \neq n$, $k \neq 0$. Las subfunciones de la función $f(\widetilde{x}^n)$ *son diferentes* si ellas difieren como funciones de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sean $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, entonces, es justa la representación

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n), \tag{3}$$

donde la disyunción se toma por todos los vectores $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ de B^k. En el caso de que $k = n$, esta representación tiene la forma

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{4}$$

La representación (4) se puede anotar en la forma siguiente

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma}:\, f(\widetilde{\sigma}) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{5}$$

El segundo miembro de la fórmula (5) representa en sí una f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$. Análogamente, son justas las represen-

taciones

$$f(\widetilde{x}^n) = \underset{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)}{\&} (x_{i_1}^{\overline{\sigma}_1} \vee x_{i_2}^{\overline{\sigma}_2} \ldots \vee x_{i_k}^{\overline{\sigma}_k} \vee f_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} (\widetilde{x}^n)) \quad (6)$$

$$f(\widetilde{x}^n) = \underset{\widetilde{\sigma}^n:\, f(\widetilde{\sigma}^n)=0}{\&} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}). \quad (7)$$

Una conjunción elemental se llama *monótona* si no contiene variables negativas. La fórmula

$$P(\widetilde{x}^n) = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s, \quad (8)$$

donde K_i $(i = \overline{1, s})$ son diferentes elementos monótonos de par en par sobre el conjunto X^n, se llama *polinomio de Zhegalkin* o *polinomio por módulo* 2. Al mayor de los rangos de las conjunciones elementales que entran en el polinomio se le llama *grado de este polinomio*. El número s se llama *longitud del polinomio* (8). Si $s = 0$, suponemos que $P(\widetilde{x}^n) = 0$.

3.1. Por medio de transformaciones equivalentes reducir a la f.n.d. la fórmula:

1) $F = (x_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_1 \vee x_3)$;

2) $F = ((x_1 \vee x_2\overline{x}_3x_4)((\overline{x}_2 \vee x_4) \to x_1\overline{x}_3\overline{x}_4) \vee x_2x_3 \vee (\overline{x}_1 \vee x_4)$;

3) $F = ((x_1 \to x_2x_3)(x_2x_4 \oplus x_3) \to x_1\overline{x}_4) \vee \overline{x}_1$.

3.2. Representar las funciones siguientes en una f.n.d. perfecta:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \to x_2x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01101100)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (10001110)$.

3.3. Mediante transformaciones de tipo $A = Ax \vee A\widetilde{x}$, $A \vee A = A$, pasar de la f.n.d. dada $D = (\widetilde{x}^3)$ a la perfecta si:

1) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2x_3$;

2) $D(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3$;

3) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$.

3.4. Con ayuda de relaciones del tipo $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ transformar las f.n.d. del problema anterior a f.n.c.

3.5. Construir una f.n.c. perfecta para cada una de las funciones del problema 3.3.

3.6. Contar el número de funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las que la f.n.c. perfecta es también simultáneamente f.n.d.

3.7. Hallar la longitud de la f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n)$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$.

3.8. Sean $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y^m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ dos conjuntos que no se intersecan. Supongamos que las f.n.d. perfectas de las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{y}^m)$ tienen respectivamente k y l sumandos. Hallar la longitud de la f.n.d. perfecta de las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^n) \& g(\widetilde{y}^m)$; 2) $f(\widetilde{x}^n) \vee g(\widetilde{y}^m)$; 3) $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{y}^m)$.

3.9. Expresar las funciones x_1-, $\overline{x}_2$- y $\overline{x}_1 x_3$-componentes de la función $f(\widetilde{x}^3)$ mediante las f.n.d. de complejidad mínima para:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (01101101)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus x_2\overline{x}_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2\overline{x}_3) \oplus x_2$.

3.10. Hallar entre las funciones dependientes de las variables x_1 y x_2 aquellas que tienen el mayor número de subfunciones diferentes de par en par.

3.11. Contar el número de funciones booleanas $f(\widetilde{x}^n)$ que se pasan a sí después de la permutación de x_1 y x_2.

3.12. Dos funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{x}^n)$ son *permutativamente equivalentes* si existe una permutación π de los números $1, \ldots, n$ tal, que $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Hallar el número de clases de funciones permutativamente equivalentes de $P_2(X^2)$.

3.13*. La función $f_n(\widetilde{x}^n)$ se determina recurrentemente con las relaciones siguientes:

$$f_4(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_1 x_2 (x_3 \vee x_4) \vee \overline{x}_2 (\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1 x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4,$$

$$f_{n+1}(\widetilde{x}^{n+1}) = f_n(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)\overline{x}_{k+1} \vee x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ (n \geqslant 4).$$

Hallar para cada función de la sucesión $\{f_n\}$ el número de diferentes subfunciones de tipo $f_\sigma^i(\widetilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, tales que ningunas dos de las cuales sean permutativamente equivalentes.

3.14. Demostrar que el número de diferentes funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las cuales la función dada $g(\widetilde{x}^k)$ es subfunción, no es menor que $2^{2^n} - (2^{2^k} - 1)^{2^{n-k}}$, $(k \leqslant n)$.

3.15. Que sea $f_0^i(\widetilde{x}^n) = f_1^i(\widetilde{x}^n)$ para cualquier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ es una constante.

3.16. Hallar el número de tales funciones $f(\widetilde{x}^n)$ que $f_{00}^{i,j}(\widetilde{x}^n) = f_{11}^{i,j}(\widetilde{x}^n)$ para todos los $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

3.17. Sea $h(\widetilde{x}^n) = f(g_1(\widetilde{x}^n), \ldots, g_{i-1}(\widetilde{x}^n), g_i(\widetilde{x}^n), g_{i+1}(\widetilde{x}^n), \ldots, g_n(\widetilde{x}^n))$, $n \geqslant 2$ y con cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\sigma \in \{0, 1\}$ se cumple la relación

$$S_\sigma^i h(\widetilde{x}^n)| = f(S_{\overline{\sigma}}^i g_1(\widetilde{x}^n)|, \ldots, S_{\overline{\sigma}}^i g_{i-1}(\widetilde{x}^n)|,$$

$$\overline{\sigma}, S_{\overline{\sigma}}^i g_{i+1}(\widetilde{x}^n)|, \ldots, S_{\overline{\sigma}}^i g_n(\widetilde{x}^n)|),$$

o sea que la x_i^σ-componente de la superposición de las funciones f, $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$ es igual a la superposición de la $x_i^{\bar\sigma}$-componente de las funciones f, $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n$. Supongamos además de eso que para todos los j, k $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ y para cualesquiera σ_j, σ_k de $\{0, 1\}$ la $x_j^{\sigma_j} x_k^{\sigma_k}$-componente de la función $g_i(\tilde{x}^n)$ coincide con la $x_j^{\bar\sigma_j} x_k^{\bar\sigma_k}$-componente de esa misma función $g_i(\tilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$. Mostrar que $h(\tilde{x}^n)$ es una constante.

3.18. Hallar el número de conjunciones elementales monótonas de un rango r sobre el conjunto X^n.

3.19. Hallar el número de polinomios de grado r sobre el conjunto de variables X^n.

3.20. Hallar el número de diferentes polinomios de longitud k sobre el conjunto X^n que se reducirán a cero en las colecciones $\tilde{0}$ y $\tilde{1}$. (Los polinomios se consideran diferentes si difieren en la composición de la c.e.)

Adoptaremos la siguiente numeración de las conjunciones elementales monótonas sobre el conjunto de variables $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada c.e. monótona K le cotejaremos un vector $\tilde{\sigma}(K) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de B^n en el que $\sigma_i = 1$ si, y sólo si, x_i entra en K. Número de c.e. K llamaremos al número $\nu(\tilde{\sigma}(K)) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{n-i}$. La constante 1 tendrá en esta numeración el número cero. Así que se puede anotar cada polinomio $P(\tilde{x}^n)$ con la forma

$$P(\tilde{x}^n) = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 K_1 \oplus \beta_2 K_2 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^n-1} K_{2^n-1}, \qquad (9)$$

donde K_i es la c.e. que tiene el número i $(i = \overline{0, 2^n - 1})$. El vector $\tilde{\beta}_P = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1})$ se llamará *vector de los coeficientes del polinomio* $P(\tilde{x}^n)$.

El método de los coeficientes indeterminados para la construcción del polinomio de Zhegalkin, el cual realiza la función $f(\tilde{x}^n)$, consiste en lo siguiente. Se examina el polinomio de la forma (9) y para cada $\tilde{\alpha} \in B^n$ se compone una ecuación de tipo $f(\tilde{\alpha}) = P(\tilde{\alpha})$. La resolución de estas ecuaciones da el coeficiente del polinomio $P(\tilde{x}^n)$.

EJEMPLO. $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$, $P(\tilde{x}^2) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_2 \oplus \beta_2 x_1 \oplus \beta_3 x_1 x_2$.

$$f(0, 0) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(0, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1, 0) = 0 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1.$$

Hallamos $\beta_0 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_1 = 0$. Así que $x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2$.

3.21. Hallar a base del método de los coeficientes indeterminados los polinomios de Zhegalkin para las funciones:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (1001)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01101000)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (11111000)$.

3.22. Introducimos la operación T sobre los vectores de B^{2^n}. Si $n = 1$ y $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, entonces $T(\widetilde{\alpha}) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$. Supongamos que para cada $\widetilde{\sigma} \in B^{2^n}$ el vector $T(\widetilde{\sigma})$ está definido y el vector $\widetilde{\alpha}$ de $B^{2^{n+1}}$ tiene la forma $\widetilde{\alpha} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1})$. Y también que:

$$T(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}),$$
$$T(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1}) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^n-1}).$$

Entonces $T(\widetilde{\alpha}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}, \delta_0 \oplus \varepsilon_0, \delta_1 \oplus \varepsilon_1, \ldots, \ldots, \delta_{2^n-1} \oplus \varepsilon_{2^n-1})$. Por ejemplo, si $\widetilde{\alpha} = (1011)$, entonces $T(\widetilde{\alpha}) = (1101)$. Demostrar que el vector $\widetilde{\alpha}_f$ de los valores de la función $f(\widetilde{x}^n)$ está vin ulado con el vector $\widetilde{\beta}_P$ de los coeficientes del polinomio $P(\widetilde{x}^n)$ que realiza la función $f(\widetilde{x}^n)$ de la siguiente manera: $\widetilde{\alpha}_f = T(\widetilde{\beta}_P)$, $\widetilde{\beta}_P = T(\widetilde{\alpha}_f)$.

3.23. Hallar el vector $\widetilde{\beta}_P$ de los coeficientes del polinomio de Zhegalkin para una función $f(\widetilde{x}^4)$ tal que $\widetilde{\alpha}_f = (1011001000101101)$.

UNO DE LOS MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN del polinomio de Zhegalkin por la fórmula F consiste en lo siguiente: primero se construye una fórmula equivalente sobre el conjunto de enlaces $\{\&, -\}$, después se sustituye en todos los sitios $\bar{x}$ por $x \oplus 1$, se abren los paréntesis utilizando la ley distributiva $(x \oplus y) z = xz \oplus yz$ y se reducen los miembros semejantes.

EJEMPLO. $x \rightarrow x_2 = \overline{x_1 \bar{x}_2} = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1$.

3.24. Construir polinomios para las funciones:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \bar{x}_3) \mid x_1$.

3.25. Cualquier función booleana f puede ser anotada en forma de polinomio. Para eso se emplean las operaciones aritméticas corrientes de multiplicación, suma y resta. Es suficiente para realizar esto expresar la función f mediante la conjunción y negación y después sustituir las subfórmulas de tipo $\bar{A}$ por $1 - A$ y abrir los paréntesis. Expresar mediante operaciones aritméticas las funciones si-

guientes:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (10000001)$.

3.26. Indicar la función $f(\widetilde{x}^n)$ que tiene una longitud del polinomio que supera en 2^n veces la longitud de su f.n.d. perfecta.

3.27. Demostrar la veracidad de la siguiente fórmula de descomposición por k variables:

$$f(\widetilde{x}^n) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in B^k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

3.28. Demostrar que:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 (f_0^1(\widetilde{x}^n) \oplus f_1^1(\widetilde{x}^n)) \oplus f_0^1(\widetilde{x}^n)$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee (f_0^1(\widetilde{x}^n) \sim f_1^1(\widetilde{x}^4))) \sim f_1^1(\widetilde{x}^n)$.

3.29. Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ que se realiza con un polinomio de grado $k > 0$, se hace igual a 1 no menos que en 2^{n-k} vectores de B^n.

3.30. ¿En cuántas colecciones de B^n se hace igual a la unidad el polinomio $P(\widetilde{x}^n)$?

1) $P(x^n) = x_1 \ldots x_k \oplus x_{k+1} \ldots x_n$, $(1 \leqslant k < n)$;

2) $P(\widetilde{x})^n = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_1 x_2 \ldots x_n$.

3.31. Mostrar que para cualquier l $(l \leqslant 2^n)$ existe un polinomio $P(\widetilde{x}^n)$ de longitud no mayor que n para el cual $|N_{P(\widetilde{x}^n)}| = l$.

3.32. Demostrar que toda función $f(\widetilde{x}^n)$ puede ser representada en la forma $f(\widetilde{x}^n) = \sum_{i=1}^{s} K_i$, donde K_i $(i = \overline{1, S})$ son conjunciones elementales que contienen no más de una negación de la variable, y $s \leqslant 2^{n-1}$.

3.33. Mostrar que si en todos los lugares de una f.n.d. perfecta se sustituye el signo $\vee$ por el signo $\oplus$, entonces resultará una fórmula equivalente a la inicial. ¿Será justa una afirmación análoga para una f.n.d. arbitraria?

Se llama *derivada de una función booleana* $f(\widetilde{x}^n)$ *respecto al conjunto de variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (*o diferencia booleana*) a la función

$$\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = f(x_1, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}, \ldots$$
$$\ldots, x_n) \oplus f(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_n).$$

(En el caso en que $k = 1$ se emplea la designación $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_{i_1}}$.)

3.34. Demostrar las siguientes propiedades de la derivada:

1) $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\right)=\frac{d}{dx_i}\left(\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_j}\right)$;

2) $\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}=\frac{\partial \bar{f}(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial(f(\widetilde{x}^n)\oplus g(\widetilde{x}^n))}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}=\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}\oplus\frac{\partial g(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$;

4) $\frac{d(f(\widetilde{x}^n)\vee g(\widetilde{x}^n))}{dx_i}=\bar{f}(\widetilde{x}^n)\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\bar{g}(\widetilde{x}^n)\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}$;

5) $\frac{d(f(\widetilde{x}^n)g(\widetilde{x}^n))}{dx_i}=f(\widetilde{x}^n)\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus g(\widetilde{x}^n)\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}$;

6) $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}=0$ si, y sólo si, x_i no entra en forma evidente en el polinomio de Zhegalkin de la función $f(\widetilde{x}^n)$;

7) si $f(\widetilde{x}^n)=x_1g(x_2, x_3, \ldots, x_n)\oplus h(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonces $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_1}=g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

3.35. Si $g(x_1, \ldots, x_m)$ y $h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ son funciones booleanas y $1\leqslant i_j\leqslant m$, para todos los $j=\overline{1, k}$, entonces:

1) $\frac{\partial(g\oplus h)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}=\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$;

2) $\frac{\partial(g\,\&\,h)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}=h\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1},\ldots,\partial x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial(g\vee h)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}=\bar{h}\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1},\ldots,\partial x_{i_k})}$.

§ 4. MINIMIZACION DE LAS FUNCIONES DE BOOLE

Conjunción admisible o *implicante* de la función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama a una tal conjunción elemental K sobre el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que $K\vee f(\widetilde{x}^n)=f(\widetilde{x}^n)$. El implicante K de la función f se llama *implicante simple* si después de eliminar de K cualquier letra resulta una conjunción elemental que no es una implicante de la función f. La disyunción de todas las implicantes de la función f se llama *f.n.d. abreviada* de la función f.

La forma normal disyuntiva se llama:

mínima, si contiene el menor número de letras entre todas las f.n.d. equivalentes a ella;

la más corta, si tiene la menor longitud entre todas las f.n.d. equivalentes a ella;

sin salida, si la eliminación de cualquier sumando o letra lleva a una f.n.d. no equivalente;

f.n.d. de la función f, si realiza la función f.

Si la conjunción elemental K es implicante de la función $f(\tilde{x}^n)$ entonces el conjunto N_k de tales vectores $\tilde{\alpha}$ de B^n, que hacen $K(\tilde{\alpha}) = 1$, forma una cara que se contiene en el conjunto N_f. Esta cara se llama *intervalo de la función $f(\tilde{x}^n)$ correspondiente a la implicante K*. El intervalo de la función f que no se contiene en ningún otro intervalo de la función f se llama *intervalo máximo*. Los intervalos máximos corresponden a las implicantes simples de la función f.

4.1. Seleccionar del conjunto dado de conjunciones elementales $\mathscr{K}$ las implicantes simples de la función $f(\tilde{x}^n)$ si:

1) $\mathscr{K} = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (00101111)$;

2) $\mathscr{K} = \{x_1\bar{x}_2, x_2x_3, x_1, x_1x_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;

3) $\mathscr{K} = \{x_1, \bar{x}_4, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^4) = (1010111001011110)$.

El método de Blake para obtener una f.n.d. abreviada de un f.n.d. arbitraria consiste en la utilización de las reglas de aglutinación sintetizada $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ y de absorción $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$. Se sobreentiende que estas reglas se aplican de izquierda a derecha. En la primera etapa se hacen todas las operaciones de aglutinación sintetizada mientras sea posible. En la segunda etapa, las operaciones de absorción.

Ejemplo. Obtener la f.n.d. abreviada para $\mathscr{D}(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$.

Después de la primera etapa obtendremos

$$\mathscr{D}_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3.$$

Después de la segunda,

$$\mathscr{D}_2 = x_1x_2 \vee x_3.$$

4.2. Construir empleando el método de Blake una f.n.d. abreviada en base a la f.n.d. dada $\mathscr{D}$:

1) $\mathscr{D} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

2) $\mathscr{D} = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

3) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$.

Se puede obtener una f.n.d. abreviada de la función $f(\tilde{x}^n)$ dada como una f.n.c. de la manera siguiente. Primero se abren los paréntesis utilizando la ley distributiva, después se tachan de la f.n.d. letras y sumandos a base de las reglas $x\bar{x} = 0$, $xx = x$, $x \vee x = x$, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

Ejemplo. Obtener la f.n.d. abreviada para

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Después de abrir los paréntesis tendremos

$$\mathscr{D}_1 = x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3.$$

Aplicando las reglas indicadas anteriormente obtendremos

$$\mathscr{D} = x_1x_3 \vee x_2.$$

4.3. Construir una f.n.d. abreviada a base de la f.n.c. dada:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

4.4. Sea N_f un conjunto de vectores $\widetilde{\alpha} \in B^n$ tales que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ y $l^a(f)$ es la longitud de la f.n.d. abreviada de la función f. Mostrar que $l^a(f) \leqslant \frac{1}{2} |N_f|(|N_f| + 1)$.

4.5. Hallar la longitud de la f.n.d. abreviada de las funciones siguientes:

1) $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$;

3) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots x_n)$;

4) $(x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

5) $(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \bar{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4.6. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ tal que $N_f = \{\widetilde{\alpha} : k \leqslant \|\widetilde{\alpha}\| \leqslant k+m\}$, y $k \leqslant l \leqslant k+m$, $\widetilde{\alpha} \in B_l^n$.

1) Hallar el número de sumandos de la f.n.d. abreviada de la función f que se hacen igual a la unidad en la colección $\widetilde{\alpha}$.

2) Mostrar que la longitud de la f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x}^n)$ es igual a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.

4.7. Supongamos que las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{y}^m)$ no tienen variables comunes, K es una implicante simple de la función f, y que L es una implicante simple de la función g. Mostrar que $K \& L$ es una implicante simple de la función $f \& g$.

Cada conjunción elemental sobre el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mutua y unívocamente corresponde a la cara del cubo B^n formada por los vértices $\widetilde{\alpha}$ en los que la c.e. se hace igual a la unidad. Esto permite construir la f.n.d. abreviada partiendo

de la representación geométrica de la función booleana. En el cubo B^n se marcan los vértices del conjunto N_f de la función f. Se anotan las caras que se contienen en N_f y no se contienen en otras caras formadas por los vértices del conjunto N_f. A cada una de las caras obtenidas se le coteja una implicante simple.

Ejemplo. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^3)$ está dada por el vector $\tilde{\alpha}_f = (11111000)$. Se requiere hallar su f.n.d. abreviada.

Solución. El conjunto N_f está formado por {(000), (001), (010), (011), (100)}. Las caras tienen la forma g_1 = {(000), (001), (010),

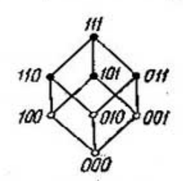


Fig. 2.

(011)}, g_2 = {(000), (100)}. La cara g_1 corresponde a la c.e. $\bar{x}_1$, y la cara g_2, a $\bar{x}_2\bar{x}_3$. La f.n.d. abreviada es $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ (véase la fig. 2).

4.8. Construir una f.n.d. abreviada de la función $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^4) = (1111100001001100)$;
2) $f(\tilde{x}^4) = (0000001111111101)$;
3) $f(\tilde{x}^4) = (0001101111011011)$.

4.9. Contar el número de funciones $f(\tilde{x}^n)$ para las cuales la conjunción elemental de rango r dada es:

1) implicante;
2) implicante simple.

4.10. Sea $i_r(f)$ el número de implicantes de rango r de la función $f(\tilde{x}^n)$, y $s_r(f)$ el número de implicantes simples de rango r. Sea P_n el conjunto de funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$\bar{i}_r(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} i_r(f);$$

$$\bar{s}_r(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} s_r(f).$$

Mostrar que:

1) $\bar{i}_r(n) = \binom{n}{r} 2^{r-2^{n-r}}$;

2) $\bar{s}_r(n) = \binom{n}{r} 2^{r-2^{n-r}} (1-2^{-2^{n-r}})^r$.

Cuando los valores de n son pequeños se puede hallar la f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x}^n)$ con la ayuda de una tabla rectangular (una *tabla minimizadora*). Por ejemplo, supongamos que la función $f(\widetilde{x}^4)$ está dada mediante la tabla 5. Reuniendo las casillas que corresponden a los valores uno de la función f en los intervalos máximos, como se muestra en la tabla 5, y cotejándoles la c.e., obtendremos la f.n.d. abreviada

$$x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4.$$

Tabla 5

x_1	x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0

4.11. Construir unas f.n.d. abreviadas para las funciones dadas con las tablas siguientes:

1)

x_1	x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1

2)

x_1	x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1

3)

x_1	x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0

La implicante simple se llama *nuclear* si su eliminación de la f.n.d. abreviada lleva a una f.n.d. que no es equivalente a la inicial. Para cada implicante nuclear K existe una tal colección de

valores de las variables que lleva K a la unidad y a los demás sumandos de la f.n.d. abreviada, a cero. Esta colección se llama *colección propia* de la implicante nuclear.

4.12. Seleccionar de las f.n.d. abreviadas siguientes las implicantes nucleares:

1) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;

2) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$;

3) $x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_4$.

4.13. Mostrar que el número de implicantes nucleares de una función arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$ no supera a 2^{n-1}.

4.14. Hallar el número de implicantes nucleares de la función del problema 4.5.

4.15. Hallar el número de funciones booleanas $f(\widetilde{x}^n)$ para las cuales la c.e. $x_1 \ldots x_r$ es implicante nuclear.

4.16. Sean K, K_1, K_2 conjunciones de una f.n.d. abreviada, y r, r_1, r_2, los rangos de estas conjunciones. Supongamos que $K \vee K_1 \vee K_2 = K_1 \vee K_2$. Mostrar que $r_1 + r_2 \geqslant r + 2$.

4.17. Construir todas las f.n.d. finales de las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$;
2) $f(\widetilde{x}^4) = (1110011000010101)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (0110101111011110)$.

4.18. Contar el número de f.n.d. sin salida y mínimas que tienen las funciones del problema 4.5.

4.19. Mostrar que el número de f.n.d. sin salida de una función booleana arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$ no supera a $\binom{3^n}{2^n}$.

4.20*. ¿Cuántas f.n.d. sin salida tiene una función que tenga 2^{n-1} implicantes nucleares?

4.21. Aclarar si las siguientes f.n.d. son finales, las más cortas o mínimas:

1) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_2$;

2) $\mathscr{D} = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

3) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

4.22. Sea $L(f)$ la complejidad mínima y $l(f)$, la longitud de la f.n.d. más corta de la función f. Mostrar que $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant nl(f(\widetilde{x}^n))$ para cualquier función arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$.

4.23. Mostrar que $l(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant 2^{n-1}$, $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant n2^{n-1}$ para cualquier función $f(\widetilde{x}^n)$.

4.24. ¿Para cuántas funciones $f(\tilde{x}^n)$ son justas las relaciones que van a continuación?

1) $L(f(\tilde{x}^n)) = n2^{n-1}$;

2) $L(f(\tilde{x}^n)) = n2^{n-1} - n$.

4.25. Poner el ejemplo de un número k $(0 < k \leqslant n2^n)$, tal que no existe una función $f(\tilde{x}^n)$ que tenga una f.n.d. mínima de complejidad k.

4.26. Hallar la complejidad de las f.n.d. mínimas y la longitud de las f.n.d. más cortas para las funciones del problema 4.5.

4.27. Examinemos una familia de funciones zonales, o sea de funciones $f(\tilde{x}^n)$ para las que existen unos números k y m tales que

$$N_f = \{\tilde{\alpha} : k \leqslant \|\tilde{\alpha}\| \leqslant k + m\}.$$

1) ¿Qué número de implicantes nucleares tiene la función zonal $f(\tilde{x}^n)$ para diferentes k y m?

2) ¿En cuántas funciones zonales $f(\tilde{x}^n)$ se alcanza el número máximo de implicantes nucleares?

4.28. La función $f(\tilde{x}^n)$ se llama *en cadena* (*cíclica*) si se puede disponer el conjunto N_f en una sucesión que sea 2-cadena (respectivamente, 2-ciclo).

1) Hallar el número de f.n.d. sin salida y minimales de la función en cadena $f(\tilde{x}^n)$, si $|N_f| = l$.

2) Lo mismo para la función cíclica $f(\tilde{x}^n)$, tal, que $|N_f| = 2m$ $(m > 2)$.

§ 5. VARIABLES SUSTANCIALES Y FICTICIAS

La variable x_i de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *sustancial* si pueden encontrarse tales colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ que $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ y $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. En el caso contrario la variable x_i se llama variable *ficticia* (*insustancial*) de la función $f(\tilde{x}^n)$. Dos funciones $f(\tilde{x}^n)$ y $g(\tilde{x}^n)$ se llaman *iguales* si los conjuntos de sus variables sustanciales coinciden y en cualesquiera dos colecciones, que se diferencien, puede ser, sólo en los valores de las variables insustanciales, los valores de las funciones son los mismos. Supongamos que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Diremos que la función $\varphi(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_n)$ *se obtiene de* $f(\tilde{x}^n)$ *mediante la identificación de las variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ si φ se obtiene de f sustituyendo con x a las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

En calidad de x se puede tomar cualquier variable que no pertenezca al conjunto $X^n \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

5.1. Mostrar que la afirmación «x_i es una variable sustancial de la función $f(\tilde{x}^n)$» es equivalente a cada una de las siguientes afirmaciones:

1) $f_0^i(\tilde{x}^n) \neq f_1^i(\tilde{x}^n)$;

2) existen las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(i_j \neq i, \ j = \overline{1, k})$ y las constantes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ tales que la función $f_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n)$ sustancialmente depende de x_i.

5.2. Enumerar las variables sustanciales de las siguientes funciones:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$;
2) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to x_2$;
3) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)\, x_4$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \times$
$\times (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

5.3. Mostrar que x_1 es una variable ficticia de la función f (expresando f con una fórmula en la que x_1 no entre en forma evidente):

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)\, x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 \to x_2 \bar{x}_3))\, x_2$.

5.4. Indicar las variables ficticias de la función f:

1) $f(\tilde{x}^3) = (11110000)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (00110011)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (00111100)$.

5.5. Supongamos qua la función $f(\tilde{x}^n)$ está dada con el vector $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n - 1})$. Demostrar que si x_k es una variable ficticia, entonces $\alpha_i = \alpha_{2^{n-k}+i}$ para todos los i del segmento $[s2^{n-k+1}, (2s+1)\,2^{n-k} - 1]$, $s = \overline{0, 2^{k-1} - 1}$.

5.6. Mostrar que si entre las variables de la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, las hay ficticias, entonces la función toma el valor 1 en un número par de colecciones. ¿Es justa la afirmación contraria?

5.7. Sea la función $f(\tilde{x}^n)$ tal que $|N_f| = 2^m(2l - 1)$. ¿Cuál es el número máximo posible de variables ficticias que puede tener la función f?

5.8. Partiendo de los resultados de los problemas 5.5 y 5.6 aclarar de que variables la función f depende sustancialmente.

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1011100111001010)$;

2) $f(\widetilde{x}^4) = (0011110011000011)$.

3) $f(\widetilde{x}^4) = (0111011101110111)$;

4) $f(\widetilde{x}^4) = (0101111100001010)$.

5.9. Construir para cada función de las del problema 5.8 una igual a ella y dependiente de todas sus variables en forma sustancial.

5.10. Aclarar para cuales n $(n \geqslant 2)$ dependen sustancialmente de sus variables las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_2 \to x_3) \times$
$$\times (x_3 \to x_2) \oplus \ldots \oplus (x_n \to x_1)(x_1 \to x_n);$$

3) $f(\widetilde{x}^n) = (\ldots((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow \ldots \downarrow x_n) \to$
$$\to (x_1 \mid (x_2 \mid (x_3 \mid \ldots \mid x_n) \ldots));$$

4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots$
$$\ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1);$$

5) $f(\widetilde{x}^n) = \Big(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{[n/2]}}\Big)\ \&$
$$\&\Big(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{i_{[n/2]}}\Big) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n).$$

5.11. Sean las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{y}^m)$ sustancialmente dependientes de todas sus variables y las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ diferentes de par en par. Mostrar que las funciones $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$ sustancialmente dependen de todas sus variables.

5.12. Sea $P^c(X^n)$ el conjunto de todas las funciones de álgebra lógica dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y además sustancialmente.

1) Enumerar todas las funciones de $P^c(X^2)$.

2) Hallar el número $|P^c(X^3)|$.

3) Mostrar que $|P^c(X^n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$.

4) Mostrar que $\lim_{n\to\infty} 2^{-2^n} |P^c(X^n)| = 1$.

5.13. Que sean $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ tales colecciones de B^n que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta} \leqslant \widetilde{\gamma}$, y sea la función $f(\widetilde{x}^n)$ tal, que $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\gamma}) \neq f(\widetilde{\beta})$. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables.

5.14*. Mostrar que x_i es una variable sustancial de la función f si, y sólo si, esta variable entra evidentemente en la f.n.d. abreviada de la función f.

5.15. Mostrar que x_i es una variable sustancial de la función f si, y sólo si, x_i entra explícitamente en el polinomio de Zhegalkin de la función f.

5.16. Sea $\frac{\partial f(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_j)} = 0$ para cualquier conjunto no vacío $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ de variables diferentes de x_j. ¿Es verdad que $f\{\tilde{x}^n\}$ ficticiamente depende de x_j?

5.17. Mostrar que toda función simétrica $f(\tilde{x}^n)$ diferente de una constante depende sustancialmente de todas sus variables.

5.18. Supongamos que en los vértices de la cadena $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1, \ldots$ $\ldots, \tilde{\beta}_{k-1}, \tilde{\gamma}$, que une tales vértices $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}$ del cubo B^n, que $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = k$, la función $f(\tilde{x}^n)$ cambia su valor m veces. Mostrar que $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de m variables.

5.19. Supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Mostrar que existen tres vértices $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ del cubo B^n que satisfacen las condiciones

$$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = 1, \quad \tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}, \quad f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta}).$$

5.20. Supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Demostrar que para cualquier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ se podrá encontrar tal j, que con cierta sustitución de constantes en el lugar de las variables diferentes de x_i y x_j, se obtendrá una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

5.21. Demostrar que para toda función $f(\tilde{x}^n)$ dependiente en forma sustancial de n variables se podrá encontrar una variable x_i y una constante α tales, que la función $f_\alpha^i(\tilde{x}^n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ sea sustancialmente dependiente de $n-1$ variables.

5.22. Supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. ¿Son justas las afirmaciones siguientes?

1) Existe tal i que para cualquier j se podrán encontrar tales constantes que colocándolas en $f(\tilde{x}^n)$ en los lugares de las variables diferentes de x_i y x_j es posible obtener una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

2) Para cualesquiera dos variables x_i y x_j existen tales constantes que colocándolas en $f(\tilde{x}^n)$ en los lugares de las variables diferentes de x_i y x_j es posible obtener una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

5.23. Enumerar las funciones de $P_2(X^2)$ que pueden ser obtenidas mediante la identificación de las variables de las funciones siguientes:

1) $f(\tilde{x}^3) = (10010110)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (11111101)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;
4) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

5.24. Mostrar que de la $f(\tilde{x}^n)$ mediante la operación de identificación se puede obtener una constante si, y sólo si, $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$.

5.25. Hallar el número de funciones $f(\tilde{x}^2)$ de las cuales con la identificación de las variables no se puede obtener una función sustancialmente dependiente de una variable.

5.26. ¿Se puede obtener de una función simétrica $f(\tilde{x}^n)$ con ayuda de la operación de identificación, una función que sea sustancialmente dependiente de todas sus variables y que no sea simétrica?

5.27. Sean $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, tres vértices de B^n, tales que $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \leqslant \tilde{\gamma}$, y $f(\tilde{x}^n)$, tal que $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta})$. Mostrar que se pueden identificar ciertas variables de la función f de tal manera que resulte una función sustancialmente dependiente de no menos que de dos y de no más que de tres variables.

5.28*. Mostrar que en la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, que se realiza con el polinomio de Zhegalkin de grado no menor de 2, se pueden encontrar dos variables tales que con la identificación de las cuales se disminuye el número de variables sustanciales en uno.

5.29. Enumerar todas las funciones $f(\tilde{x}^3)$ sustancialmente dependientes de tres variables, tales que la identificación de cualesquiera dos variables lleva a una función sustancialmente dependiente exactamente de una variable.

5.30. Sea la función $f(\tilde{x}^n)$ sustancialmente dependiente de todas sus variables y $|N_f| > 2^{n-1}$. Mostrar que al identificar cualesquiera dos de sus variables se obtiene una función no idénticamente igual a cero.

5.31. Mostrar que el número de funciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ de las cuales mediante la identificación de las variables se puede obtener la función dada $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si $n \to \infty$ es asintóticamente igual a $n2^{2^n}$.

5.32. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n)$ depende ficticiamente de x_i, entonces la identificación de esta variable con cualquier otra lleva a una función sustancialmente dependiente de las mismas variables que $f(\tilde{x}^n)$.

5.33. Sea $n \geqslant 1$ y las funciones $f(\tilde{x}^n)$ y $g(\tilde{x}^n)$ tales que $|N_{f \oplus g}| = 1$. Mostrar que para todo $i = \overline{1, n}$ por lo menos una de las funciones f o g sustancialmente dependen de x_i.

5.34. Mostrar que si $|N_{f_{00}^{ij}(\tilde{x}^n) \& f_{11}^{ij}(\tilde{x}^n)}|$ es impar, entonces la función φ, obtenida de $f(\tilde{x}^n)$ mediante la identificación de las variables x_i y x_j, sustancialmente depende de $n-1$ variables.

5.35*. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de n variables. Sea $v_f(\tilde{\alpha})$ el número de los vértices de $\tilde{\beta}$ para los cuales $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$ y $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$. Sea $v(f) = \max\limits_{\tilde{\alpha} \in B^n} v_f(\tilde{\alpha})$.

1) Mostrar que $]\sqrt{n}[\leqslant v(f) \leqslant n$.
2) Indicar las $g(\tilde{x}^n)$ y $h(\tilde{x}^n)$, tales que $v(g) =]\sqrt{n}[$, $v(h) = n$.

Capítulo II
CLASES CERRADAS Y PLENITUD

§ 1. OPERACION DE CLAUSURA. CLASES CERRADAS

Sea M un cierto conjunto de funciones del álgebra lógica. *Clausura* $[M]$ del conjunto M se llama a la totalidad de todas las funciones de P_2 que son superposiciones de las funciones del conjunto M. La operación de obtención del conjunto $[M]$ de M se llama *operación de clausura*. El conjunto M se llama *clase cerrada funcionalmente* (abreviado, *clase cerrada*), si $[M] = M$.

Sea M una clase cerrada en P_2. El subconjunto $\mathfrak{P}$ de M se llama *sistema funcionalmente completo* (o sencillamente: *sistema completo*) en M, si $[\mathfrak{P}] = M$. El conjunto $\mathfrak{P}$ de funciones del álgebra lógica se llama *sistema irreducible* si la clausura de cualquier subconjunto propio $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{P}$, es diferente de la clausura de todo el conjunto $\mathfrak{P}$, o sea $[\mathfrak{P}'] \subset [\mathfrak{P}]$ y $[\mathfrak{P}'] \neq [\mathfrak{P}]$. Un sistema irreducible y completo en la clase cerrada M se llama *base* de la clase M. El conjunto M' que se contiene en la clase cerrada M (en particular, que se contiene en todo el conjunto P_2) se llama *clase precompleta en M* si no es un sistema completo en M, pero para cualquier función $f \in M \setminus M'$ se cumple la igualdad $[M' \cup \{f\}] = M$.

Las funciones f_1 y f_2 se llamarán *congruentes* si una de ellas puede ser obtenida de la otra por medio de una sustitución de variables (sin identificación). Por ejemplo, las funciones $x \cdot \bar{y}$ e $y \cdot \bar{z}$ son congruentes, pero las funciones $x \cdot y$ y $z \cdot z$ no. Al estudiar las cuestiones relacionadas con las clases cerradas, suele ser cómodo señalar una representación del conjunto de funciones congruentes de par en par. Por ejemplo, la clase $\{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$, compuesta por el total de funciones idénticas, se designará por $\{x\}$.

Si M es cierto conjunto de funciones, entonces por medio de $M(X^n)$ (o por M^n) se designará el subconjunto de todas aquellas funciones de M, que dependan *sólo* de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.1. Argumentar las siguientes propiedades de la clausura:

1) $[[M]] = [M]$;
2) si $M_1 \subseteq M_2$, entonces $[M_1] \subseteq [M_2]$;
3) $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_2]$;
4) $[\varnothing] = \varnothing$.

1.2. ¿Se deduce en el problema 1.1 la relación 4) de las relaciones 1)—3)?

1.3. ¿Es el conjunto $\mathscr{P}$ una clase cerrada? Se presupone que junto con cada función f de $\mathscr{P}$, al conjunto $\mathscr{P}$ le pertenecen también todas las funciones de P_2 que son congruentes a f.

1) $\mathscr{P} = \{0, 1\}$; 2) $\mathscr{P} = \{\tilde{x}\}$; 3) $\mathscr{P} = \{1, \tilde{x}\}$;
4) $\mathscr{P} = \{x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \ldots, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, \ldots\}$;
5) $\mathscr{P} = \{0, x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n, n \geqslant 1\}$;
6) $\mathscr{P} = \{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n, n \geqslant 1\}$;
7) $\mathscr{P} = \{0, x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2n}, n \geqslant 1\}$.

1.4. Anotar todo lo que depende solamente de las variables x_1, x_2, x_3, y las funciones congruentes de par en par de la clausura del conjunto $\mathscr{P}$.

1) $\mathscr{P} = \{x \to 1\}$;
2) $\mathscr{P} = \{0, \bar{x}\}$;
3) $\mathscr{P} = \{x \vee y\}$;
4) $\mathscr{P} = \{x^y\}$;
5) $\mathscr{P} = \{x \oplus y \oplus z\}$;
6) $\mathscr{P} = \{(00000001)\}$.

1.5. Demostrar que si una clase cerrada en P_2 contiene una función que depende sustancialmente de $n \geqslant 2$ variables, entonces ella contiene infinitamente muchas funciones congruentes de par en par.

1.6. Enumerar todas las clases cerradas en P_2 tales que contengan solamente un número finito de funciones congruentes de par en par.

1.7. ¿Es que siempre en P_2:
1) la intersección de clases cerradas es una clase cerrada;
2) la diferencia de clases cerradas es una clase cerrada;
3) el complemento de una clase cerrada no es una clase cerrada?

1.8. Reduciendo a ciencia cierta a unos sistemas completos en P_2, mostrar que el conjunto $\mathscr{P}$ es un sistema completo en P_2, donde:

1) $\mathscr{P} = \{x \downarrow y\}$;
2) $\mathscr{P} = \{x \cdot y \oplus z, (x \sim y) \oplus z\}$;
3) $\mathscr{P} = \{x \to y, \overline{x \oplus y \oplus z}\}$;

4) $\mathscr{P}=\{x\rightarrow y,\ (1100001100111100)\}$;

5) $\mathscr{P}=\{0,\ m(x,\ y,\ z),\ x^y\oplus z\}$[1];

6) $\mathscr{P}=\{(1011),\ (1111110011000000)\}$.

1.9. Aclarar cuál de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$, $\not\supseteq$, se cumple para los conjuntos[2]) K_1 y K_2 (la relación $\not\supseteq$ significa que no se cumple ninguna de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$.

1) $K_1=[M_1\cap M_2]$, $\qquad K_2=[M_1]\cap[M_2]$;

2) $K_1=[M_1\setminus M_2]$, $\qquad K_2=[M_1]\setminus[M_2]$;

3) $K_1=[M_1\cup(M_2\cap M_3)]$, $\qquad K_2=[M_1\cup M_2]\cap[M_1\cup M_3]$;

4) $K_1=[M_1\cap(M_2\cup M_3)]$, $\qquad K_2=[M_1\cap M_2]\cup[M_1\cap M_3]$;

5) $K_1=[M_1\setminus(M_1\cap M_2)]$, $\qquad K_2=[M_1]\setminus[M_1\cap M_2]$.

1.10. Sean M_1 y M_2 tales clases cerradas en P_2, que $M_1\setminus M_2\neq\neq\varnothing$. Formular ejemplos de clases concretas M_1 y M_2 que satisfagan además las condiciones siguientes:

1) $M_1\cap M_2=\varnothing$, $M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $[M_1\cup M_2]=M_1\cup M_2$;

2) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $[M_1\cup M_2]=M_1\cup M_2$;

3) $M_1\supset M_2$, $[M_1\setminus M_2]\neq M_1\setminus M_2$;

4) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $[M_1\setminus M_2]=M_1\setminus M_2$;

5) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $[M_1\oplus M_2]=M_1\oplus M_2$.

1.11. Del sistema $\mathscr{P}$ que es completo para la clase cerrada $M=[\mathscr{P}]$ seleccionar la base.

1) $\mathscr{P}=\{0,\ 1,\ x,\ \bar{x}\}$;

2) $\mathscr{P}=\{1,\ x\oplus y\oplus z\oplus 1\}$;

3) $\mathscr{P}=\{x\vee y,\ x\cdot y\cdot z,\ x\vee y\cdot z,\ (x\vee y)\cdot z\}$;

4*) $\mathscr{P}=\{x\oplus 1,\ x\oplus y\oplus z,\ m(x,\ y,\ z)\}$;

5) $\mathscr{P}=\{x\vee y\vee z,\ x\cdot y\cdot z,\ (x\rightarrow y)\rightarrow z,\ (x\vee y)\rightarrow z\}$;

6) $\mathscr{P}=\{(x\rightarrow y)\rightarrow(y\rightarrow z),\ x\vee y\vee(y\oplus z)\}$;

7) $\mathscr{P}=\{x\cdot y,\ x\vee y,\ x\rightarrow y,\ x\oplus y\oplus z\oplus u\}$.

1.12. Demostrar que toda clase precompleta en P_2 es una clase cerrada.

1.13. Sean M_1 y M_2 clases precompletas diferentes en una misma clase cerrada M [3]). Demostrar que si $M_1^1\neq M^1$ entonces $M_1^1\neq M_2^1$

---

[1]) Por $m(x, y, z)$ (o $h_2(x, y, z)$) se designa la función $xy\vee xz\vee yz$, que se llama *mediana* (o *función de votación*).

[2]) Los conjuntos se toman de P_2.

[3]) Suponemos que $M\subseteq P_2$.

(o sea que las clases M_1 y M_2 se «diferencian» ya en el conjunto de funciones que dependen de una variable).

1.14. Enumerar todas las clases precompletas en la clase cerrada M.

1) $M = [0, \bar{x}]$;
2) $M = [0, 1]$;
3) $M = [x \cdot y]$;
4) $M = [0, x \vee y]$;
5) $M = [0, x \cdot y \cdot z]$.

1.15. Comprobar si es una clase cerrada en P_2:

1) el conjunto de todas las funciones simétricas;

2) el conjunto de todas las funciones $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 0$ que satisfacen la condición $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n) = 0$[1]);

3) el conjunto de todas las funciones $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ que tienen $|N_f| = 2^{n-1}$.

1.16. Demostrar que si M es una clase cerrada en P_2, entonces $[M \cup \{x\}] = M \cup \{x\}$.

1.17. Demostrar que el conjunto P_2 de todas las funciones del álgebra lógica no es presentable en la forma de una unión $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ ($s \geqslant 2$) de clases cerradas en P_2 que no sean intersecables de par en par.

1.18. Demostrar que toda clase cerrada en P_2 que contenga una función diferente de una constante, contiene también la función x.

1.19. Demostrar que si una clase cerrada en P_2 tiene una base finita, entonces cualquier base de esta clase es finita.

1.20. Evaluar desde arriba la potencia del conjunto de todas las clases cerradas en P_2 que tienen sistemas completos finitos.

1.21. Desmostrar que si una clase no vacía cerrada en P_2 es diferente a los conjuntos $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$, entonces es imposible ampliarla hasta la base en P_2.

1.22. Sea M una clase cerrada en P_2 que tiene un número finito de clases precompletas (en M). Supongamos que cualquier clase cerrada en M se amplía hasta una clase precompleta en M. Demostrar que el número de funciones en cualquier base de la clase M no supera al número de clases precompletas (en M).

1.23. Demostrar que en la clase cerrada $[x \rightarrow y]$ se contienen sólo tales funciones de P_2 que pueden ser presentadas (con una exactitud hasta la designación de las variables) de forma $x_i \vee \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $f(\tilde{x}^n) \in P_2$.

1.24. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece a la clase cerrada $[x \rightarrow y]$ y depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Demostrar que $|N_f| > 2^{n-1}$.

1.25. Demostrar (no a base del problema 1.12) que cada clase precompleta en P_2 contiene una función idéntica.

---

1) Si $n = 0$, entonces f es una constante 0, vista como una función de o-lugar.

§ 2. DUALIDAD Y CLASE DE FUNCIONES AUTODUALES

La función $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *dual a la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Por definición, la función dual a la constante 0 es la constante 1 y, recíprocamente, la constante 0 es función dual a la constante 1. Una función dual a la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se designa por $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Es justa la siguiente afirmación, llamada *principio de dualidad*: si $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, entonces $\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Supongamos que M es un cierto conjunto de funciones del álgebra lógica. Mediante M^* designaremos el conjunto de todas las funciones duales a las funciones del conjunto M. El conjunto M^* se llamará *dual al conjunto* M. Si $M^* = M$, entonces el conjunto M se llamará *autodual*.

La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *autodual* si $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El conjunto de todas las funciones autoduales se designa por S.

De la definición de autodualidad se deduce que una función es autodual si, y sólo si, en cualesquiera dos colecciones opuestas de valores de las variables ella toma valores opuestos.

Es justa la siguiente afirmación, corrientemente llamada *lema de la función no autodual*: si la función $f(\tilde{x}^n)$ es no autodual, entonces, colocando las funciones x y $\overline{x}$ en lugar de sus variables, se puede obtener una constante.

2.1. Es la función g dual a la función f si:

1) $f = x \oplus y$, $\quad g = x \sim y$;
2) $f = x \rightarrow y$, $\quad g = y \rightarrow x$;
3) $f = xy \vee xz \vee yz$, $\quad g = xy \oplus xz \oplus yz$;
4) $f = x \oplus y \oplus z$, $\quad g = x \oplus y \oplus z$;
5) $f = \overline{xy}z \vee x(y \sim z)$, $\quad g(x, y, z) = (01101101)$.

2.2. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ está dada con el vector $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n})$. Demostrar que la función $f^*(\tilde{x}^n)$ se da con el vector $(\overline{\alpha}_{2^n}, \ldots, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1)$.

2.3. Utilizando el principio de dualidad construir una fórmula que realice la función dual a la función f. Simplificar la expresión obtenida (anotándola como una f.n.d. o en forma del polinomio de Zhegalkin).

1) $f = xy \vee yz \vee xt \vee zt$;
2) $f = x \cdot 1 \vee y(zt \vee 0) \vee \overline{x}yz$;

3) $f=(x\to y)\oplus((x\downarrow y)|(\overline{x}\sim yz))$;

4) $f=(\overline{x}\vee y\vee(y\overline{z}\oplus 1))\to 1$.

2.4. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ se realiza con la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\{0, 1, \neg, \&, \vee\}$. Demostrar que la función $f^*(\tilde{x}^n)$ se realiza con la fórmula $\mathfrak{A}^*$, llamada *dual a la fórmula* $\mathfrak{A}$ y obtenida de $\mathfrak{A}$ mediante la sustitución de cada entrada del símbolo & por el símbolo $\vee$, del símbolo $\vee$ por el &, del símbolo 0 por el 1 y del símbolo 1 por el 0.

2.5. Demostrar que si las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre el conjunto $\{0, 1, \neg, \&, \vee\}$ son equivalentes, entonces las fórmulas $\mathfrak{A}^*$ y $\mathfrak{B}^*$ también serán equivalentes.

2.6. Demostrar que si la función $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de la variable x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, entonces la función $f^*(\tilde{x}^n)$ también dependerá sustancialmente de x_i.

2.7. Demostrar que:

1) un conjunto dual a M^* coincide con M;

2) el conjunto M es una clase cerrada si, y sólo si, el conjunto M^* es una clase cerrada;

3) si el conjunto M_1 es un sistema completo (o una base) en la clase cerrada M, entonces el conjunto dual M_1^* forma un sistema completo (y respectivamente una base) en la clase cerrada M^*;

4) si $M_1\supseteq M_2$, entonces $M_1^*\supseteq M_2^*$.

2.8. Contar el número de funciones dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el conjunto $[M^*]\setminus[M]$.

1) $M=\{0, \overline{x}\}$; 2) $M=\{x\oplus y\}$; 3) $M=\{xy, x\vee y, 1\}$.

2.9. ¿Es autodual la función f?

1) $f=m(x, y, z)$;

2) $f=\overline{(x\to y)\to xz}\to(y\to z)$;

3) $f=(\overline{x}\vee y\vee\overline{z})t\vee\overline{x}y\overline{z}$;

4) $f=(0001001001100111)$;

5) $f=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_{2m+1}\oplus\sigma$, donde $\sigma\in\{0, 1\}$.

2.10. Demostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$ es autodual si, y sólo si, su x_1-componente $f_1^1(\tilde{x}^n)$ es dual a su $\overline{x}_1$-componente $f_0^1(\tilde{x}^n)$.

2.11. Demostrar que si $f(\tilde{x}^n)$ es una función autodual, entonces $|N_f|=2^{n-1}$.

2.12. Mostrar que no existen funciones autoduales sustancialmente dependientes de dos variables.

2.13. Contar el número de funciones autoduales sustancialmente dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.14. Enumerar todas las funciones autoduales sustancialmente dependientes de las variables x, y, z y mostrar que cada una de estas

funciones se puede representar en la forma $m(x^{\alpha}, y^{\beta}, z^{\gamma})$ o en la forma $x \oplus y \oplus z \oplus \sigma$, donde α, β, γ, σ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$.

2.15. ¿Con qué valores $n \geqslant 2$ la función $f(\tilde{x}^n)$ es autodual?

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_2(x_3 \vee \ldots \vee x_n) \vee \ldots$
$\ldots \vee x_{n-2}(x_{n-1} \vee x_n) \vee x_{n-1}x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus x_2(x_3 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus x_{n-2}(x_{n-1} \oplus x_n) \oplus x_{n-1}x_n$;

3) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \rightarrow x_n) \oplus (x_n \rightarrow x_1)$;

4) $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{]n/2[} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{]n/2[}}$

(donde la disyunción se toma por todas las conjunciones monótonas de longitud $]n/2[$, compuestas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

2.16. Sean $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $g_i^*(\tilde{x}^m) = g_{n-i+1}(\tilde{x}^m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Es la función $f(g_1(\tilde{x}^m), \ldots, g_n(\tilde{x}^m))$ autodual?

2.17. Demostrar que si

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, entonces $f(x, x, \ldots, x) \in \{x, \bar{x}\}$;
2) $f \in S$, entonces $m(x_1, \bar{f}, x_2 \oplus x_3 \oplus f) \oplus x_3 \oplus x_4 \in S$;
3) $f \in S$, entonces $\bar{x}_1 f \oplus x_2 x_3 \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus x_2 \bar{f} \oplus x_4 \oplus x_5 \in S$.

2.18. Supongamos que las funciones $f(\tilde{x}^n)$ y $f^*(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ satisfacen la condición $|N_f| = |N_{f^*}|$. Demostrar que:

1) si $\bar{f} \vee f^* \equiv \text{const}$, entonces $f \in S$;
2) si $f \oplus f \cdot f^* \equiv \text{const}$, entonces $f \in S$.

2.19. Obtener una constante de la función no autodual f mediante la sustitución en los lugares de las variables de las funciones x y $\bar{x}$.

1) $f = (00111001)$;
2) $f = (x \vee \bar{y} \vee z)t \vee \bar{x}yz$;
3) $f = (x \downarrow y) \rightarrow (x \oplus z)$;
4) $f = xy \vee xz \vee yt \vee zt$.

2.20. Demostrar que si una función no autodual depende sustancialmente de no menos que de tres variables, entonces identificando ciertas variables suyas se puede obtener una función sustancialmente dependiente de dos variables.

2.21. Demostrar que si mediante la identificación de las variables de la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$ no se puede obtener una función que dependa sustancialmente de dos variables, entonces la función f es autodual.

2.22. Sea $f(x, y, z) = m(x^{\alpha}, y^{\beta}, z^{\gamma})$, donde α, β, γ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. Demostrar que para cualquier $n \geqslant 4$ de la función f se puede obtener (empleando la operación de superposición) una función que dependa sustancialmente de n variables.

2.23. Demostrar las equivalencias siguientes:

1) $x \oplus y \oplus z = m(m(x, y, \bar{z}),\ m(x, \bar{y}, z),\ m(\bar{x}, y, z)) = m(x, m(\bar{x}, y, z), \overline{m(x, y, z)}) = m(m(x, \bar{y}, z), m(\bar{x}, y, z)\ \bar{z})$;

2) $(x \vee y \vee z)\, t \vee xyz = m(m(y, z, t), x, t) = m(m(x, y, t), m(x, z, t), m(y, z, t))$;

3) $m(x, y, z) = m(\overline{m(\bar{x}, y, z)}, y, z)$.

2.24. Sea $f(\tilde{x}^n) \in P_2$ y $n \geqslant 3$. Demostrar la relación siguiente: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) =$

$$= f(x_1, m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_n) \oplus \oplus f(m(x_1, x_2, x_3), x_2, m(x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_n) \oplus \oplus f(m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

2.25. 1) Demostrar, empleando los problemas 2.12, 2.14, 2.23, 1) y 2.24, que $\overline{[m(x, y, z)]} = [m(x, \bar{y}, \bar{z})] = S$.

2) Demostrar que cualquier base de la clase S de todas las funciones autoduales, contiene no más de dos funciones.

2.26. ¿Se puede obtener la función g de la función f con ayuda de la operación de superposición en los casos siguientes?

1) $f = (10110010)$, $g = (1000)$;
2) $f = (1111011100010000)$, $g = (00010111)$;
3) $f = (11001100)$, $g = (00110011)$.

2.27. La función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ posee las propiedades siguientes: $f(\tilde{x}^n) \notin S$ y con la identificación en ella de cualesquiera $2[\sqrt{n}]$ variables se obtiene una función de la clase S. ¿Cuál es el número mayor de variables sustanciales que puede tener la función $f(\tilde{x}^n)$?

2.28. Enumerar todas las funciones sustancialmente dependientes de las variables x_1, x_2, x_3, x_4 tales que todo $x_i^{\sigma_i}$-componente suyo sea una función autodual.

2.29. ¿Es el conjunto M autodual?

1) $M = \{x \oplus y \oplus z,\ m(x \oplus y,\ x \sim z,\ y \sim \bar{z})\}$;
2) $M = \{x \cdot y,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus m(x, y, z)\}$;
3) $M = \{(x \rightarrow y) \rightarrow y,\ (x \vee y) \oplus x \oplus y,\ (x \vee y \vee z)\, t \vee \bar{x}yz\}$;
4) $M = S \setminus \{x \oplus y \oplus \bar{z},\ m(x, \bar{y}, \bar{z})\}$.

§ 3. LINEALIDAD Y CLASE DE FUNCIONES LINEALES

La función $f(\tilde{x}^n)$ se llama *lineal* si se presenta en la forma

$$f(\tilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. El conjunto de todas las funciones lineales se designa por L, y el conjunto de todas las funciones linea-

les dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por L^n. El conjunto L es cerrado y precompleto en la clase P_2. Es justa la afirmación (*lema de la función no lineal*):

Si $f \notin L$, entonces sustituyendo en el lugar de sus variables las funciones $0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}$ se puede obtener xy o $\overline{xy}$.

Si $f \notin L$, entonces f se llama *no lineal*.

3.1. Aclarar, descomponiendo la función f en un polinomio de Zhegalkin, si es ella lineal.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2) \oplus x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1x_2(x_1 \oplus x_2)$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_4x_1$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \sim x_3$.

3.2. Demostrar que si la función $f(\widetilde{x}^n)$ toma valores opuestos en cualesquiera dos vértices contiguos $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n, entonces ella es lineal. ¿Es justa la afirmación inversa?

3.3. Demostrar que si $f(\widetilde{x}^n)$ es una función lineal diferente de una constante, entonces $|N_f| = 2^{n-1}$. ¿Es cierto lo contrario?

3.4. Aclarar si f es una función lineal.

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1010\ 1010\ 0110\ 1000)$;

2) $f(\widetilde{x}^4) = (1001\ 0110\ 1001\ 0110)$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = (1001\ 0110\ 0110\ 1001)$;

4) $f(\widetilde{x}^4) = (0110\ 1001\ 1010\ 0101)$.

3.5. Mostrar que el número de funciones lineales $f(\widetilde{x}^n)$, que sustancialmente dependen exactamente de k variables del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es igual a $2\binom{n}{k}$.

3.6. Hallar el número de funciones autoduales que pertenecen al conjunto L^n.

3.7. Mostrar que no se puede obtener la función $x \to y$ de las funciones $x \oplus y \oplus z$, $x \oplus 1$, $x \oplus y$ por medio de la operación de superposición.

3.8. Aclarar si se puede obtener xy de la función f sustituyendo a sus variables por las funciones $0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}$.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (1110\ 1000)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (0111\ 1111)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (1001\ 1001)$;

4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_{n-1})$.

3.9. Aclarar si se puede realizar la función $x \to y$ con una fórmula sobre el conjunto Φ, donde:

1) $\Phi = L \cup \{xy \vee xz \vee zy\}$;

2) $\Phi = L \setminus S$;

3) $\Phi = (L \cup \{xy \vee yz \vee zx\}) \setminus S$;

4) $\Phi = (L \cup \{xy\}) \setminus S$.

3.10*. Demostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$, que depende sustancialmente de todas sus variables, es lineal si, y sólo si, al sustituir cualquier subconjunto de variables por cualquier colección de constantes se obtiene una función que dependerá sustancialmente de todas las demás variables.

3.11*. Mostrar que de un polinomio de grado $k \geqslant 3$ mediante la identificación de las variables se puede obtener un polinomio de grado $k-1$.

3.12*. Mostrar que de una función no lineal $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$ mediante la identificación de las variables se puede obtener una función no lineal que dependa de no más que de tres variables. Enumerar todas las funciones no lineales $f(\tilde{x}^3)$ de las que mediante la identificación de las variables no se puede obtener una función no lineal.

3.13. Mostrar que de una función no lineal mediante la identificación de las variables se puede obtener una función congruente bien a $xy \oplus l(x, y)$, bien a $xy \oplus yz \oplus zx \oplus l(x, y, z)$, donde $l(x, y)$ y $l(x, y, z)$ son funciones lineales.

3.14. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \notin L$, entonces en B^n se podrá encontrar una cara bidimensional tal, que exactamente en tres vértices de ella la función $f(\tilde{x}^n)$ toma el mismo valor.

3.15. Sea la función $f(\tilde{x}^n)$ tal que para todos los i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ $f_{00}^{ij}(\tilde{x}_n) = f_{11}^{ij}(\tilde{x}^n)$. Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \in L$.

3.16. Aclarar cual de los sistemas enumerados a continuación forma una base en L.

1) $\{1, x \oplus y\}$;

2) $\{x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

3) $\{x \sim y, x \oplus y, 0\}$;

4) $\{0, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

5) $\{1 \oplus x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z\}$.

3.17. Seleccionar todas las bases de un sistema completo en L.

1) $\{0, 1, x \oplus 1, x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

2) $\{x \sim y, (x \sim y) \sim z, x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus t\}$;

3) $\{0, (x \sim y) \sim z, x \oplus 1, x \oplus y\}$.

3.18. Demostrar que cualquier sistema completo en L contiene no menos de dos funciones.

3.19. Demostrar que cualquier base en L contiene no menos de tres funciones.

3.20. Demostrar que existe solamente un número finito de clases cerradas que contienen sólo funciones lineales. Enumerar todas estas clases.

3.21. Mostrar que cualquier clase cerrada que contenga un número finito de funciones no congruentes de par en par se contiene en L.

3.22. La función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ satisface las condiciones:

1) $|N_f| = 2^{n-1}$; 2) $f \oplus f^*$ es una constante.

Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \in L \cup S$ siempre que $n \leqslant 3$. Poner un ejemplo de la función f que satisfaga las condiciones 1) y 2) y que no pertenezca al conjunto $L \cup S$.

3.23. Demostrar que $L \cap S = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

3.24. Mostrar que $L^* = L$.

3.25. Enumerar todas las funciones no congruentes de par en par f que satisfagan las condiciones siguientes:

1) $f \notin L$;

2) cualquier subfunción (propia) de la función f es lineal.

3.26. Contar el número de funciones lineales autoduales $f(\tilde{x}^n)$ que dependan sustancialmente de todas sus variables.

3.27. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_1$ para que se obtenga una función lineal?

3.28. Sean $f(\tilde{x}^n) \in L \cap S$, $f(0, 0, \ldots, 0) = f(0, 0, \ldots, 0, 1)$ y $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. ¿A qué es igual $f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$?

3.29. ¿Con cuáles n existe una función lineal $f(\tilde{x}^n)$ que satisfaga la condición $f(0, 0, \ldots, 0) \neq f(1, 1, \ldots, 1)$ y que sea simétrica?

3.30. Sea $f(\tilde{x}^n)$ tal que

$$f_{1\,1\,\ldots\,1}^{3,\,4,\,\ldots,\,n}(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 x_2 \quad \text{y} \quad f_{0\,0\,\ldots\,0}^{3,\,4,\,\ldots,\,n}(\tilde{x}^n) = \bar{x}_2.$$

Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \notin L \cup S$.

3.31*. Enumerar todas las funciones f no congruentes de par en par, no lineales, tales que cualquier identificación de las variables lleve a una función de L.

3.32*. Enumerar todas las funciones no congruentes de par en par $f \notin L \cup S$ de las que con cualquier identificación de las variables se obtiene una función de $L \cap S$.

3.33. Sea $Q = \{0, \bar{x}, f_1, f_2, f_3\}$, donde f_1, f_2, f_3 son funciones diferentes de par en par, sustancialmente dependiente de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$. Demostrar que el sistema Q es completo en P_2.

§ 4. CLASES DE FUNCIONES QUE CONSERVAN LAS CONSTANTES

Se dice que la función $f(\tilde{x}^n)$ *conserva la constante* 0 (*la constante* 1), si $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ (respectivamente si $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$). El conjunto de todas las funciones del álgebra lógica que conservan

la constante 0 se designa por T_0 y el de las que conservan 1, por T_1. El conjunto de todas las funciones del álgebra lógica que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que conservan la constante 0 (la constante 1) se designará por T_0^n (respectivamente por T_1^n). Cada uno de los conjuntos T_0, T_1 es una clase cerrada y precompleta en P_2.

4.1. Aclarar a cuál de los conjuntos $T_0 \cup T_1$, $T_1 \setminus T_0$ pertenece cada una de las funciones enumeradas a continuación:

1) $((x \vee y) \to (x \mid yz)) \downarrow ((y \sim z) \to x)$;
2) $(xy \to z) \mid ((x \to y) \downarrow (z \oplus \bar{x}y))$;
3) $(x \to y) \,\&\, (y \downarrow z) \vee (x \to y)$.

4.2. Aclarar con cuáles n la función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece al conjunto $T_1 \setminus T_0$.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$;
2) $f(\tilde{x}^n) = (\ldots((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots \to x_n)$;
3) $f(\tilde{x}^n) = (\ldots((x_1 - x_2) \to x_3) \to \ldots \to x_n) \oplus$
$\oplus ((\ldots((x_2 \to x_3) \to x_4) \to \ldots \to x_n) \to x_1) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (\ldots(x_n \to x_1) \to x_2 \to \ldots \to x_{n-1})$;
4) $f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$.

4.3. Aclarar con cuáles n la función $f_n(\tilde{x}^n)$ dada en forma recurrente pertenece al conjunto $T_0 \setminus T_1 \cup (T_1 \setminus T_0)$

1) $f_2(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = (x_1 \to f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}))\,(x_n \vee f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1})), \quad n > 2;$$
2) $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = x_{n-1}x_n \oplus f_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}), \quad n \geqslant 3;$$
3) $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) \oplus x_n f_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}), \quad n \geqslant 3.$$

4.4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión $x_1 \to x_2 \to x_1 \to x_2 \to x_1$ para obtener una fórmula que realice una función de T_0?

4.5. Contar el número de funciones que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en cada uno de los conjuntos siguientes:

1) $T_0 \cap T_1$; 5) $L \setminus (T_0 \cap T_1)$; 9) $S \cap (T_0 \cup T_1)$;
2) $T_0 \cup T_1$; 6) $L \setminus (T_0 \cup T_1)$; 10) $S \cap (T_0 \setminus T_1)$;
3) $T_0 \cap L$; 7) $T_1 \cap S$; 11) $S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
4) $T_1 \cup L$; 8) $T_0 \setminus S$; 12) $(S \setminus T_0) \cap T_1$;
13) $L \cap S \cap T_1$;
14) $L \setminus (T_0 \cup (T_1 \cap S))$;
15) $(L \cup S) \setminus (T_0 \cup T_1)$.

4.6. Hallar la función $f(x, x, \ldots, x)$ si:

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \setminus T_0$;
2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L \setminus (T_1 \cap S)$;
3) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \setminus T_0$.

4.7. Aclarar si se puede obtener la función f mediante la operación de superposición sobre el conjunto Φ si:

1) $f = x \oplus y$, $\Phi = \{x \to y\}$;
2) $f = x \to y$, $\Phi = \{xy, x \vee y\}$;
3) $f = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\Phi = T_0 \cup (S \setminus (L \cup T_1))$;
4) $f = x\overline{y}$, $\Phi = (T_1 \setminus L) \cup \{x \oplus y\}$.

4.8. Demostrar que:

1) $T_0 = [xy, x \oplus y] = [x \vee y, x \oplus y]$;
2) $T_1 = [x \vee y, x \sim y] = [xy, x \sim y]$;
3) $T_0 \cap T_1 = [xy, x \oplus y \oplus z]$.

4.9*. Demostrar que cualquier base en T_0 contiene no más de tres funciones. Poner ejemplos de bases de clase T_0 que estén formadas de una, dos y tres funciones.

4.10*. Demostrar que cualquier base en $T_0 \cap T_1$ contiene no más de dos funciones. Poner el ejemplo de una base que esté formada de una función.

4.11. ¿Existe en la clase $T_0 \cap T_1$ una función que dependa de tres variables y que forme en ella una base?

4.12. Demostrar que:

1) $L \cap T_0 = [x \oplus y]$;
2) $L \cap T_1 = [x \sim y]$;
3*) $S \cap T_0 = [xy \vee yz \vee zx, x \oplus y \oplus z] = [\overline{x}y \vee yz \vee z\overline{x}]$.

4.13. La función $f(\tilde{x}^3)$, no determinada en todos sus puntos, es igual a cero en las colecciones (000), (001) y es igual a la unidad en las colecciones (011), (100), (110). Acabar de determinar la función $f(\tilde{x}^3)$ en las demás colecciones de tal manera que la función obtenida forme una base en T_0.

4.14*. Demostrar que si la función f es sustancialmente dependiente de no menos que de dos variables y $f \notin T_0 \cup T_1$, entonces $L \cap S \subseteq [f]$.

4.15. Aclarar si son bases en T_0 los sistemas siguientes:

1) $\{xy \vee y\overline{z} \vee \overline{z}x, x \oplus y \oplus z\}$;
2) $\{x\overline{y}, x \oplus y \oplus \overline{z}, x \vee y\}$;
3) $\{xy \oplus z\}$;
4) $\{x \oplus y \oplus z, xy, x \vee y \vee z\}$.

4.16. Poner un ejemplo de una función simétrica $f(\tilde{x}^4)$ que forme un sistema completo en T_0.

4.17. Demostrar que
$L \cap T_0 \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 = L \cap S \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 \cap T_1$.

4.18*. Demostrar que las clases $T_0 \cap L$, $T_0 \cap S$, $T_0 \cap T_1$ son precompletas en T_0.

4.19. Demostrar que el sistema de funciones $\{1\} \cup \cup (T_0 \setminus (T_1 \cup L \cup S))$ es completo en P_2.

4.20. Demostrar que:

1) $T_0^* = T_1$;
2) $(T_0 \cup T_1)^* = T_0 \cup T_1$;
3) $(T_0 \cup T_1 \cup S \cup L)^* = T_0 \cup T_1 \cup S \cup L$;
4) $((T_0 \cap T_1) \cup S)^* = (T_0 \cap T_1) \cup S$;
5) $(T_0 \setminus S)^* = T_1 \setminus S$;
6) $(S \setminus T_0)^* = S \setminus T_1$.

4.21. Supongamos que $f(\widetilde{x}^4) \in S \cap L \cap T_0$, $f(1, 1, 0, 1,) = 1$ y $f(\widetilde{x}^4)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Hallar $f(\widetilde{x}^4)$.

4.22. Demostrar que las clases $L \cap T_0$, $L \cap T_1$, $L \cap S$, $[0, \overline{x}]$, y solamente ellas, son precompletas en L.

4.23. Demostrar que $f \in (T_0 \cap T_1) \cup S$ si, y sólo si, mediante la operación de superposición de f no se puede obtener ni una de las constantes.

§ 5. MONOTONIA Y CLASE DE FUNCIONES MONOTONAS

Una función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *monótona* si para cualesquiera dos colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n, tales que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ tiene lugar la desigualdad $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$. En el caso contrario $f(\widetilde{x}^n)$ se llamará *no monótona*. El conjunto de todas las funciones booleanas monótonas se designa por M y el conjunto de todas las funciones dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por M^n. El conjunto M es una clase cerrada y precompleta en P_2. Es justa la afirmación (*lema de la función no monótona*): si $f \notin M$, entonces sustituyendo en el lugar de sus variables las funciones 0, 1, x, se puede obtener la función $\overline{x}$.

El vértice $\widetilde{\alpha}$ del cubo B^n se llama *unidad inferior* (*cero superior*) de la función monótona $f(\widetilde{x}^n)$ si $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ (respectivamente $f(\widetilde{\alpha}) = 0$) y para cualquier vértice $\widetilde{\beta}$ de $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$ se deduce que $f(\widetilde{\beta}) = 0$ (respectivamente de $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ se deduce que $f(\widetilde{\beta}) = 1$).

5.1. ¿Cuáles de las funciones enumeradas a continuación son monótonas?

1) $x \to (x \to y)$;
2) $x \to (y \to x)$;
3) $xy(x \oplus y)$;
4) $xy \oplus yz \oplus zx \oplus z$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (00110111)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (01100111)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (0001010101010111)$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = (0000000010111111)$.

5.2. Aclarar con cuáles n la función $f(\widetilde{x}^n)$ es monótona.

1) $f(\widetilde{x}^n)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$;

2) $f(\widetilde{x}^n)=x_1x_2\ldots x_{n-1}\overline{x}_n\rightarrow(x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n)$;

3) $f(\widetilde{x}^n)=x_1x_2\ldots x_n\oplus\sum\limits_{i=1}^{n} x_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n$.

5.3. Demostrar que para las funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ son justas las siguientes fórmulas de descomposición:

$$f(\widetilde{x}^n)=x_if_1^i(\widetilde{x}^n)\vee f_0^i(\widetilde{x}^n);$$
$$f(\widetilde{x}^n)=(x_i\vee f_0^i(\widetilde{x}^n))\;\&\;f_1^i(\widetilde{x}^n).$$

5.4. Demostrar que para cada función monótona f, diferente de una constante existen f.n.d. y f.n.c. que no contienen negación de las variables y que realizan f.

5.5. Determinar el número de funciones monótonas $f(x^3)$, tales que $f(0, 1, 1)=f(1, 0, 1)=1$, $f(0, 0, 1)=0$, que existen. ¿Cuántas funciones tales pertenecen al conjunto $M\setminus S$? ¿Hay entre ellas funciones con variables ficticias?

5.6. Supongamos que $f(\widetilde{x}^4)\in S\cap M$, $f(0,0,1,1)=f(1,1,1,0)=1$, $f(\widetilde{x}^4)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Hallar $f(\widetilde{x}^4)$.

5.7. Demostrar que si f no es una constante y $f\vee f^*$ lo es, entonces $f\notin M\cup S$.

5.8. 1) ¿Es verdad que si $f(\widetilde{x}^n)$ es monótona, entonces de las condiciones

$$\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta}\in B^n,\quad \nu(\widetilde{\beta})>\nu(\widetilde{\alpha}),\quad \|\widetilde{\beta}\|>\|\widetilde{\alpha}\|,\quad f(\widetilde{\alpha})=1,$$

se deduce la igualdad $f(\widetilde{\beta})=1$?

2*) Supongamos que para cualquier k $(0\leqslant k<n)$ de las condiciones $f(\widetilde{\alpha}^n)=1$, $\nu(\widetilde{\alpha}^n)\leqslant 2^{n-1}-2^k$, $\nu(\widetilde{\beta}^n)=\nu(\widetilde{\alpha}^n)+2^k$ se deduce que $f(\widetilde{\beta}^n)=1$. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)\in M$.

5.9. Enumerar todas las funciones $f(\widetilde{x}^4)\in M$ que satisfacen las condiciones siguientes:

1) $f(1, 0, 0, 0)=1$, $f(0, 1, 1, 1)=0$;
2) $f(1, 0, 0, 0)=1$, $f(\widetilde{x}^4)\in L$;
3) $f(0, 1, 0, 0)\neq f(1, 0, 1, 1)$, $f(\widetilde{x}^4)$ es simétrica;
4) $f(1, 0, 0, 1)=0$, $f\in S$.

5.10. Mostrar que si $f(\widetilde{x}^n)$ no es monótona, entonces existen dos tales vectores $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ de B^n, diferentes exactamente en una coordenada, que $\widetilde{\alpha}<\widetilde{\beta}$, pero $f(\widetilde{\alpha})>f(\widetilde{\beta})$.

5.11. Mostrar que la función f, que depende sustancialmente de no menos que de dos variables, es monótona si, y sólo si, toda subfunción (propia) de la función f es monótona.

5.12. Poner un ejemplo de una función no monótona $f(\tilde{x}^n)$ que tenga cada subfunción del tipo $f_\sigma^i(\tilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$, $\sigma \in \{0, 1\}$ monótona. ¿Cuál es el número de tales funciones que dependan de las variables del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

5.13. Mostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$ es monótona si, y sólo si, para cualquier k ($k = \overline{1, n-1}$) de cualquier subconjunto no vacío $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ y cualesquiera colecciones $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ y $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$, tales que $\tilde{\sigma} \leqslant \tilde{\tau}$, se cumple la relación

$$f_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n) \vee f_{\tau_1 \ldots \tau_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n) = f_{\tau_1 \ldots \tau_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n).$$

5.14. Demostrar que ninguna implicante simple de una función monótona contiene variables negativas.

5.15. Diremos que una c.e. monótona K sobre el conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corresponde al vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de B^n en el caso de que $\alpha_i = 1$ para cualquier $i = \overline{1, n}$ si, y sólo si, x_i entra en K. Demostrar que si el vector $\tilde{\alpha}$ es la unidad inferior de la función monótona $f(\tilde{x}^n)$, entonces el polinomio de Zhegalkin contiene en calidad de sumando la conjunción K que corresponde al vector $\tilde{\alpha}$.

5.16*. Sea $f(\tilde{x}^n)$ una función monótona y simétrica tal que $N_f = \{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \geqslant k,\ \tilde{\alpha} \in B^n\}$. ¿Con cuáles n y k su polinomio de Zhegalkin contiene en calidad de sumando aunque sea una c.e. de rango $k + 2$?

5.17. Mostrar que no existen funciones monótonas autoduales que tengan exactamente dos unidades inferiores.

5.18. Determinar si existen funciones monótonas autoduales con tres unidades inferiores que dependan sustancialmente de

1) tres variables;

2) más de tres variables.

5.19*. 1) Mostrar que el número máximo de unidades inferiores de una función monótona $f(\tilde{x}^n)$ es igual a $\binom{n}{[n/2]}$.

2) ¿Cuántas funciones monótonas $f(\tilde{x}^n)$ que tengan $\binom{n}{[n/2]}$. unidades inferiores hay?

5.20. Mostrar que si se cambian en forma arbitraria los valores de una función monótona en ciertas unidades inferiores suyas por ceros, entonces la función obtenida también será monótona.

5.21. Mostrar que $|M^n| \geqslant 2^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.22. Contar el número de funciones que hay en cada uno de los conjuntos siguientes:

1) $M^n \setminus (T_1^n \cap T_0^n)$;
2) $M^n \setminus (T_1^n \cup T_0^n)$;
3) $M^n \cap L^n$;
4) $M^n \cap L^n \cap S^n$;
5) $L^n \setminus (M^n \cup S^n)$.

5.23*. Mostrar que:

1) $|S^n \cap M^n| < |M^{n-1}|$, para $n \geqslant 1$;
2) $|M^n| < |M^{n-1}|^2$, para $n \geqslant 1$;
3) $|M^n| \leqslant |M^{n-2}|^2 \, 2^{2^{n-2}}$, para $n \geqslant 2$.

5.24. Sea $m(n)$ el número de funciones monótonas que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostrar que $m(1) = 3$, $m(2) = 6$, $m(3) = 20$, $m(4) = 186$.

5.25. Contar el número $m_c(n)$ de funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ que dependen sustancialmente de n variables (para $n = \overline{1, 4}$).

5.26*. Demostrar que $|M^n| < |S^n|$ para $n \geqslant 4$.

5.27. ¿Cuál es el número de funciones monótonas autoduales $f(\widetilde{x}^4)$ que dependen sustancialmente de todas sus variables?

5.28*. Utilizando aquello (véase el problema I.1.18) de que el cubo B^n se puede dividir en $\binom{n}{[n/2]}$ cadenas crecientes no intersecadas, mostrar que :

1) $|M^n| \leqslant (n+1)^{\binom{n}{[n/2]}}$; 2) $|M^n| \leqslant (n-1)^{\binom{n}{[n/2]}} + 2$.

5.29*. Partiendo de I.1.18, demostrar que $|M^n| \leqslant 3^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.30. Demostrar que el número de funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ en las que cada unidad inferior tiene un peso que no supera a k $(0 \leqslant k \leqslant n/2)$, no es mayor de $1 + k^{\binom{n}{k}}$.

5.31. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. La función f, definida en el conjunto A y que toma sus valores del conjunto $\{0, 1\}$, se llama *monótona*, si para cualesquiera α y β de A, tales que $\alpha \leqslant \beta$, se cumple la relación $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Supongamos que $m(A, \leqslant)$ es el número de diferentes funciones monótonas determinadas en A. Hallar el $\min\limits_{|A|=n} m(A, \leqslant)$, el $\max\limits_{|A|=n} m(A, \leqslant)$ e indicar en qué conjuntos parcialmente ordenados de n elementos se alcanzan estos valores mínimos y máximos.

5.32*. Poner un ejemplo de una sucesión de funciones monótonas $f_n(\widetilde{x}^{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que el número de unidades inferiores de la función $f_n(\widetilde{x}^{2n})$ supere en $2^n/n$ veces el número de ceros superiores.

5.33. Demostrar que si el número de unidades inferiores de una función monótona $f(\widetilde{x}^n)$ no es menor de 2, entonces la función depende sustancialmente por lo menos de dos variables.

5.34*. Sea $t(f)$ el número de unidades inferiores de una función monótona f y $p(f)$, el número de sus variables sustanciales. Demostrar que $p(f) \geqslant \log_2 t(f) - \log_2 \log_2 t(f)$.

5.35. Sea $f \in M^n$ y $m_k(f)$, el número de vectores $\tilde{\alpha}$ de B_k^n tales que $f(\tilde{\alpha})=1$, $q_k(f)=m_k(f)\Big/\binom{n}{k}$. Mostrar que $q_{k-1}(f) \leqslant q_k(f)$, $k=\overline{1, n}$.

5.36*. La función $\varphi(\tilde{x}^n)$ determinada en B^n que toma valores arbitrarios y reales, se llama *función monótona generalizada*, si de $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ se deduce que $\varphi(\tilde{\alpha}) \leqslant \varphi(\tilde{\beta})$. Demostrar que una función monótona generalizada puede ser representada con una combinación lineal de funciones booleanas monótonas del tipo siguiente:

$$\varphi(\tilde{x}^n) = c + \sum_{f(\tilde{x}^n) \in M \cap T_0} a_f \cdot f(\tilde{x}^n),$$

donde c es real, $a_f \geqslant 0$.

5.37*. Sea $\varphi(\tilde{x}^n)$ una función monótona generalizada y $q_k(\varphi) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{\tilde{\alpha} \in B_k^n} \varphi(\tilde{\alpha})$. Mostrar que $q_{k-1}(\varphi) < q_k(\varphi)$, $k=\overline{1, n}$.

5.38*. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \notin M$ $(n \geqslant 4)$, entonces identificando las variables de ella se puede obtener una función no monótona dependiente de no más que de tres variables.

5.39. Determinar si de la función $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{t}\,(xy \to z)$ se puede obtener $\bar{x}$:

1) identificando las variables;

2) identificando las variables y sustituyendo ciertas variables por la constante 0;

3) identificando las variables y sustituyendo las constantes.

5.40*. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \notin M \cup S$ $(n \geqslant 3)$, entonces, identificando las variables, de ella se puede obtener una función no monótona, no autodual y que dependa sustancialmente de dos variables.

5.41. Mostrar que si $f \in M$, entonces $f^* \in M$.

5.42. Mostrar que cualquier función monótona se contiene en no menos de dos clases de T_0, T_1, L.

5.43. Mostrar que M no se contiene en ninguna de las clases T_0, T_1, S, L.

5.44. ¿Se puede obtener la función xy de la función $xy \vee yz \vee zx$ mediante la operación de superposición?

5.45. ¿Se puede obtener 0 por medio de las funciones xy, $x \vee y$, 1?

5.46. Mostrar que el conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y\}$ forma una base en M.

5.47. Seleccionar del conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y, xy \vee z, xy \vee \vee yz \vee zx\}$ todos los subconjuntos que son bases en M.

5.48*. Mostrar que cualquier base en M contiene no más de cuatro y no menos de tres funciones.

5.49. Mostrar que cualquier base en M que esté compuesta de tres funciones contiene una función que depende sustancialmente de tres o más variables.

5.50. Poner ejemplos de bases en las clases siguientes:

1) $T_0 \cap M$; 2) $T_1 \cap M$; 3) $L \cap M$.

5.51. Sea $f(\widetilde{x}^n) \in M$ $(n \geqslant 4)$. Demostrar la justedad de la representación

$$f(\widetilde{x}^n) = m(f(x_1, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_n), \qquad f(x_3, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

donde $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee zx$.

5.52. Mostrar que:

1) $xy \vee yz \vee zx$ forma una base en $M \cap S$;

2) cualquier función de $M \cap S$ que depende sustancialmente de más que de una variable, forma una base en $M \cap S$.

5.53*. Que sea $\mathscr{D}$ un conjunto formado por todas las disyunciones elementales monótonas y $\mathscr{K}$, el conjunto de todas las conjunciones elementales monótonas. Mostrar que los conjuntos $\mathscr{D} \cup \{0, 1\}$, $\mathscr{K} \cup \{0, 1\}$, $M \cap T_0$, $M \cap T_1$ y solamente ellos son precompletos en M.

5.54*. Que sea $f(\widetilde{y}^{2^n}) = \mathop{\&}\limits_{k=0}^{n-1} \mathop{\&}\limits_{i=0}^{2^n-2^k-1} (y_i \to y_{i+2^k})$. Demostrar que $|N_f| = |M^n|$.

5.55. Supongamos que f es monótona y depende sustancialmente de n variables. Demostrar que o bien su f.n.d. abreviada tiene un sumando de rango mayor que $\sqrt{n} - 1$, o bien su f.n.c. abreviada tiene un factor de rango mayor que $\sqrt{n} - 1$.

§ 6. PLENITUD Y CLASES CERRADAS

En P_2 es justo el siguiente *criterio de plenitud*.

TEOREMA (Post). *El sistema $\mathfrak{P}$ es completo en P_2 si, y sólo si, él no se contiene por completo en ninguna de las clases T_0, T_1, L, S y M.*

La función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *shefferiana* (o *función de Sheffer*) si ella forma una base en P_2.

Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Por $\mathfrak{R}(f(\widetilde{x}^n))$ designan el conjunto de todas las funciones tales que se obtienen de la función $f(\widetilde{x}^n)$ mediante la identificación de las variables, teniendo en cuenta que la propia función f no pertenece al conjunto $\mathfrak{R}(f)$. Si $n < 2$ entonces, por definición $\mathfrak{R}(f(\widetilde{x}^n)) = \varnothing$. El conjunto $\mathfrak{R}(f(\widetilde{x}^n))$ se llama *sistema hereditario de la función* $f(\widetilde{x}^n)$. La función f se lllama *irreducible*

si $[\mathfrak{N}(f)] \neq [f]$. La base $\mathfrak{B}$ de una clase cerrada K se llama *simple* después de sustituir una clase arbitratria f de $\mathfrak{B}$ por su sistema hereditario se obtiene un sistema no completo en K. La función f, que no pertenece a la clase cerrada K, se llama *simple con relación a* K si su sistema hereditario $\mathfrak{N}(f)$ se contiene en K.

6.1. Mostrar que en P_2 no existen clases precompletas diferentes de las clases T_0, T_1, L, S, M.

6.2. Aclarar mediante el criterio de la plenitud si el sistema $\mathcal{F}$ es completo.

1) $\mathcal{F}=\{x\to y,\ x\to \overline{y}\cdot z\}$;
2) $\mathcal{F}=\{x\cdot\overline{y},\ \overline{x}\sim yz\}$;
3) $\mathcal{F}=\{0,\ 1,\ x(y\sim z)\vee\overline{x}(y\oplus z)\}$;
4) $\mathcal{F}=\{(01101001),\ (10001101),\ (00011100)\}$;
5) $\mathcal{F}=\{(0010),\ (1010110111110011)\}$;
6) $\mathcal{F}=(S\setminus M)\cup(L\setminus(T_0\cup T_1))$;
7) $\mathcal{F}=(S\cap M)\cup(L\setminus M)\cup(T_0\setminus S)$;
8) $\mathcal{F}=(M\setminus(T_0\cap T_1))\cup(L\setminus S)$.

6.3. Demostrar que si la función f depende sustancialmente de no menos que de dos variables y pertenece a la clase $S\cap M$, entonces el sistema $\{0,\ \overline{f}\}$ será completo en P_2.

6..4 ¿Es completo el sistema $\mathcal{F}=\{f_1(\tilde{x}^n),\ f_2(\tilde{x}^n)\}$ si:

1) $f_1\in S\setminus M,\quad f_2\notin L\cup S,\quad \overline{f}_1\to f_2\equiv 1$;
2) $f_1\notin T_0\cup L,\quad f_2\notin S,\quad f_1\to\overline{f}_2\equiv 1$;
3) $f_1\notin T_0\cap T_1.\quad f_2\in M\setminus T_1,\quad f_1\to f_2\equiv 1$?

6.5. ¿Es el sistema $\mathcal{F}=\{f_1(\tilde{x}^n),\ f_2(\tilde{x}^n),\ f_3(\tilde{x}^n)\}$ completo si se sabe que $f_1\notin L\cup(T_0\cap T_1)$, $f_2\in M\setminus L$, $f_1\to f_2\equiv 1$ y $f_1\vee\vee f_3\equiv 1$?

6.6. Seleccionar todas las bases posibles del sistema $\mathcal{F}$ completo en P_2.

1) $\mathcal{F}=\{(x\vee y(\overline{x}\vee\overline{y}),\ xy\oplus z,\ (x\oplus y\sim z,\ m(x,\ y,\ z)\}$;
2) $\mathcal{F}=\{1,\ \overline{x},\ xy(y\sim z),\ x\oplus y\oplus m(x,\ y,\ z)\}$;
3) $\mathcal{F}=\{0,\ x\oplus y,\ (x\to y)\downarrow(y\sim z),\ (x|(xy))\to\overline{z}\}$;
4) $\mathcal{F}=\{x\vee(x\oplus y)\vee z,\ (x\sim y)\sim z,\ xy\oplus zu,\ m(x,\ \overline{y},\ \overline{z})\}$.

6.7. Poner respectivamente tres ejemplos de bases en P_2 que contengan una, dos, tres y cuatro funciones.

6.8. Enumerar todas las diferentes bases en P_2 que contienen solamente funciones dependientes sustancialmente de las dos variables x, y (las bases se consideran diferentes si una no se reduce a otra mediante la operación de un cambio de nombre de las variables).

6.9. Aclarar si se puede ampliar el conjunto $\mathfrak{A}$ hasta una base en P_2.

1) $\mathfrak{A}=\{x \oplus y,\ m(x, y, z)\}$; 3) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0 \cup T_1)$;
2) $\mathfrak{A}=\{x \sim y,\ x \vee yz\}$; 4) $\mathfrak{A}=L \cap M$.

6.10*. ¿Existe una base en P_2 formada por cuatro funciones f_1, f_2, f_3, f_4 tales que $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin L$ y $f_4 \notin S$?

6.11. Empleando operaciones teórico-conjuntivas expresar la clausura del conjunto $\mathfrak{A}$ mediante las clases cerradas conocidas T_0, T_1, L, S, M y P_2.

1) $\mathfrak{A}=P_2\setminus(T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)$;
2) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0 \cup L)$; 6) $\mathfrak{A}=S\setminus(T_0\setminus T_1)$;
3) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0 \cap T_1)$; 7) $\mathfrak{A}=L\setminus(T_0 \cup T_1)$;
4) $\mathfrak{A}=M\setminus L$; 8) $\mathfrak{A}=T_0\setminus T_1$;
5) $\mathfrak{A}=T_0 \cap (L\setminus S)$; 9) $\mathfrak{A}=(T_0 \cap T_1)\setminus M$.

6.12. Aclarar cuál de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$, $\not\supseteq\!\!\!\not\subseteq$ tiene lugar para las clases K_1 y K_2 (la relación $\not\supseteq\!\!\!\not\subseteq$ significa que no se cumple ninguna de las demás cinco relaciones restantes).

1) $K_1=[x \vee (x \oplus y) \vee z]$, $K_2=[x \vee y,\ x \oplus y]$;
2) $K_1=[x \sim y,\ x \vee yz]$, $K_2=[x \oplus yz]$;
3) $K_1=[xy,\ x \oplus y]$, $K_2=[x \rightarrow y,\ x \sim y]$;
4) $K_1=[1,\ x \vee y]$, $K_2=[x \oplus y,\ x \vee \overline{yz}]$;
5) $K_1=[x \oplus y,\ x \sim yz]$, $K_2=[m(x, y, z),\ x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ xy \oplus z]$;
6) $K_1=[x \rightarrow y]$, $K_2=[x \oplus y,\ m(x, y, z)]$.

6.13. 1) Demostrar que en $P_2(X^2)$ existen exactamente dos funciones de Sheffer.

2) Contar el número de funciones de Sheffer en $P_2(X^3)$.

6.14. 1) Demostrar que si $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, entonces f es una función de Sheffer.

2*) Contar el número de funciones de Sheffer en $P_2(X^n)$.

6.15. Demostrar que de una función de Sheffer, que depende sustancialmente de no menos que de tres variables, mediante la identificación de las variables se puede obtener una función de Sheffer dependiente sustancialmente de dos variables.

6.16. ¿Con cuáles n $(n \geqslant 2)$ la función f es shefferiana?

1) $f=1 \oplus \sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i y_j$;
2) $f=1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$;
3) $f=(x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \rightarrow x_n) \oplus (x_n \rightarrow x_1)$;
4) $f=(x_1|x_2) \oplus (x_2|x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1}|x_n) \oplus (x_n|x_1)$;

5) $f = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

6) $f = \bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_{[n/2]} \leqslant n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{[n/2]}$.

6.17. La función f no pertenece al conjunto $T_1 \cup M$ y toma exactamente un solo valor igual a cero. Demostrar que ella o bien es una función de Sheffer, o bien depende sustancialmente de una sola variable.

6.18. Poner el ejemplo de una función de Sheffer que dependa sustancialmente del número menor posible de variables y que toma el valor unidad en la mitad exacta de todas las colecciones de los valores de las variables.

6.19. Poner el ejemplo de una función $f(\widetilde{x}^n)$ tal que para cualquier k $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$ y cualquier subconjunto $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, la función

$$\frac{d}{dx_{i_1}}\left(\frac{d}{dx_{i_2}}\left(\ldots\left(\frac{d}{dx_{i_k}} f(\widetilde{x}^n)\right)\ldots\right)\right)$$

es shefferiana.

6.20. Que sea la función f monótona y tenga exactamente dos unidades inferiores. Demostrar que f es una función de Sheffer.

6.21. Demostrar que cualquier función autodual no perteneciente al conjunto $T_0 \cup T_1 \cup L \cup M$ forma una base en la clase S.

6.22. 1) Demostrar que cualquier función de la clase L pertenece aunque sea a una de las clases T_0, T_1, S y M.

2) Poner ejemplos de funciones lineales contenidas exactamente en una de las clases T_0, T_1, S.

6.23*. Poner el ejemplo de una función de la clase T_0 que no forme base en T_0 y que no pertenezca al conjunto $T_1 \cup L \cup S \cup M$.

6.24. Poner el ejemplo de una función no lineal $f(\widetilde{x}^n)$ que dependa sustancialmente del menor número posible de variables y que satisfaga la condición siguiente: para cualquier número i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ cada una de las funciones $f_0^i(\widetilde{x}^n)$ y $f_1^i(\widetilde{x}^n)$ toma el valor unidad exactamente en 2^{n-2} colecciones de valores de las variables.

6.25*. Demostrar que de funciones no lineales sustancialmente dependientes de $n \geqslant 4$ variables se puede obtener, mediante la identificación de las variables, una función no lineal dependiente sustancialmente de $n-1$ variables.

6.26*. Demostrar que si la función f no pertenece al conjunto $L \cup S$ y depende sustancialmente de $n \geqslant 4$ variables, entonces identificando en ella las variables se puede obtener una función no lineal y no autodual que dependa sustancialmente de $n-1$ variables. ¿Es justa esta afirmación para $n = 3$?

6.27*. Demostrar que de una función de Sheffer $f(\widetilde{x}^n)$ sustancialmente dependiente de $n \geqslant 3$ variables se puede obtener mediante la identificación de las variables una función shefferiana dependiente sustancialmente de $n-1$ variables.

6.28. Determinar si son justas las sucesiones siguientes:

1) $f \notin (T_0 \cup T_1) \setminus S \Rightarrow f \in L \cup M$;
2) $f \notin T_0 \cup T_1 \cup M \Rightarrow f$ es una función de Sheffer;
3) $f \notin T_0 \cup S \cup M \Rightarrow f \in (L \setminus T_1) \cap (S \setminus M)$;
4) $f \notin L \cup S \cup M \Rightarrow f$ es una función do Sheffer.

6.29. Supongamos que el subconjunto $\mathfrak{A}$ de $P_2(X^n)$ contiene más de 2^{2^n-1} funciones. Demostrar que siempre que $n \geqslant 2$, $\mathfrak{A}$ es completo en el sistema P_2.

6.30. Demostrar que cualquier función de una base simple en P_2 es simple con relación a cierta clase precompleta en P_2.

6.31. Hallar todas las funciones no congruentes de par en par y simples con relación a la clase K.

1) $K = T_0$; 3) $K = [0, 1, x]$;
2*) $K = L \cap S$; 4) $K = [0, 1, x, \overline{x}]$.

6.32. Demostrar que las funciones, simples con relación a la clase K y no congruentes de par en par entre sí, se llevan a efecto con las funciones del conjunto $\mathfrak{A}$.

1) $K = T_0 \cap T_1$, $\mathfrak{A} = \{0, 1, \overline{x}\}$;
2) $K = T_0 \cap L \cap S$, $\mathfrak{A} = \{0, 1, \overline{x}, xy, x \vee y, m(x, y, z), m(x, y, \overline{z})\}$.

6.33. Demostrar que en P_2 existen:

1) sólo dos bases simples compuestas de una función $\{x \mid y\}$ y $\{x \downarrow y\}$;
2*) sólo tres bases simples compuestas de cuatro funciones $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, f\}$, donde $f \in \{xy, x \vee y, m(x, y, z)\}$.

Capítulo
III

LOGICAS k-VALENTES

§ 1. REPRESENTACION DE LAS FUNCIONES DE LAS LOGICAS k-VALENTES CON FORMULAS DE TIPO ESPECIAL

En todo este capítulo se supone que el número k es natural y mayor de dos. Por E_k se designa el conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. La función $f(\widetilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *función de la lógica k-valente* si en cualquier colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ los valores de las variables son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $\alpha_i \in E_k$; el valor de $f(\widetilde{\alpha})$ también pertenece al conjunto E_k. *La reunión de todas las funciones de la lógica k-valente* se designa por P_k. Los conceptos de variables ficticias y sustanciales, de funciones iguales y congruentes, de fórmulas sobre conjuntos de funciones (y enlaces), de operaciones de superposición y clausura, de clase cerrada, de base y otros, se definen en las lógicas k-valentes lo mismo que los conceptos respectivos del álgebra lógica. Por eso en lo sucesivo solamente se citan las definiciones de aquellos conceptos que se diferencian esencialmente de los conceptos análogos en P_2.

Se consideran *elementales* las siguientes funciones de la lógica k-valente:

Las constantes $0, 1, \ldots, k-1$; estas funciones se van a examinar como funciones dependientes de un número finito y arbitrario (incluyendo también el cero) de variables;

la negación de Post: $x + 1$ (mód k), designación: $\bar{x}$;

la negación de Lukasevich: $(k-1) - x$, designación: $\sim x$ o Nx;

la función característica del número i: $j_i(x)$, $i = 0$,

$$1, \ldots, k-1;\ j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = i, \\ 0, & \text{si } x \neq i; \end{cases}$$

la función característica (de segundo género) del número i:

$$J_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, k-1;\quad J_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{si } x = i, \\ 0, & \text{si } x \neq i; \end{cases}$$

el mínimo de x e y: mín (x, y);

el máximo de x e y: máx (x, y);

la suma por módulo k: $x + y$ (mód k), que se lee: «*x más y por módulo k*»[1]);

el producto por módulo k: $x \cdot y$ (mód k), que se lee: «*producto de x por y de módulo k*»[1]);

la diferencia truncada:

$$x \dot{-} x = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ x-y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

la implicación:

$$x \supset y = \begin{cases} (k-1), & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ (k-1)-x+y, & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

función de Webb: máx $(x, y) + 1$ (mód k), se designa: $v_k(x, y)$;

la diferencia por módulo k:

$$x - y = \begin{cases} x-y, & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1, \\ k-(y-x), & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1. \end{cases}$$

Las funciones (operaciones) mín, más, $+$ $y \cdot$ tienen las propiedades de conmutatividad y asociatividad. Además son *justas las relaciones*:

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z);$$

—la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma;

$$\text{máx}\,(\text{mín}\,(x, y), z) = \text{mín}\,(\text{máx}\,(x \cdot z), \text{máx}\,(y \cdot z));$$

— la distributividad de la operación máx con relación a la operación mín;

$$\text{mín}\,(\text{máx}\,(x, y), z) = \text{máx}\,(\text{mín}\,(x, z), \text{mín}\,(y, z))$$

— la distributividad de la operación mín con relación a la operación máx;

$$\text{máx}\,(x, x) = x, \quad \text{mín}\,(x, x) = x$$

— la idempotencia de las operaciones máx y mín.

Se introducen por definición las igualdades siguientes:

$$\text{máx}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \text{máx}\,(\text{máx}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n), \quad n \geqslant 3;$$
$$\text{mín}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\,(\text{mín}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n), \quad n \geqslant 3;$$

$$-x = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ k - x, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Tomando en cuenta la asociatividad del producto por módulo k, la multiplicación $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (l factores, $l \geqslant 1$) corrientemente se escribe en forma de potencia x^l.

Cualquier función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de P_k se puede representar en la así llamada *primera forma* que es una análoga de la f.n.d.

[1]) En todo este capítulo, si no se indica lo contrario, los signos $+$ y $\cdot$ se interpretan como signos de *suma* y *multiplicación* por módulo k.

perfecta para las funciones del álgebra lógica:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{\widetilde{\sigma}}\{\min(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n))\},$$

donde el máximo se toma por todas las colecciones $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de los valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para las funciones de la lógica k-valente es justa una representación más que se llama la *segunda forma*:

$$f(\widetilde{x}^n) = \sum_{\widetilde{\sigma}} f(\widetilde{\sigma}) \cdot j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n),$$

en donde la suma se hace por todas las colecciones $\widetilde{\sigma}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de los valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$ (la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k).

Se llama *polinomio* $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *por módulo* k de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a la expresión del tipo

$$a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_mX_m,$$

donde los coeficientes a_i pertenecen al conjunto E_k y X_j es o bien cierta variable de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, o bien el producto de las variables de este conjunto.

Se dice que cierta función de P_k es *representable* (o *se realiza*) *mediante un polinomio* por módulo k, si existe un polinomio por módulo k igual a esta función.

En P_k tiene lugar el siguiente

TEOREMA. *Cualquier función de* P_k *es representable con un polinomio por* módulo k *si, y sólo si,* k *es un número primo.*

1.1. Demostrar las relaciones siguientes:

1) $-(\overline{x}) = \sim x$;
2) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x, y)$;
3) $(x \supset y) \supset y = \max(x, y)$;
4) $(x \supset y) + \overline{x} = \min(x, y)$;
5) $x \dot{-} y = x - \min(x, y)$;
6) $(\sim x) \dot{-} (\sim y) = y \dot{-} x$;
7) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim \max(x, y)$.

1.2. Demostrar que las igualdades que van a continuación en las cuales la suma y la diferencia son las corrientes (o sea no por el módulo k) y al calcular el mínimo los valores de los argumentos no se reducen por el módulo k.

1) $x \supset y = \min(k - 1, (\sim x) + y)$;
2) $x \dot{-} y = \sim \min(0, y - x)$;
3) $(x \supset y) \dot{-} (y \supset x) = -\min(0, x - y)$.

1.3. Representar la función $J_{k-2}(x)$ en forma de superposición de las funciones $k - 1$, $x + 2$ y $x \dot{-} y$.

1.4*. ¿Con qué valores de $\alpha \in E_k$ cualquier función $J_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 2$, es presentable en forma de una superposición sobre el conjunto $\{x + \alpha, J_{k-1}(x)\}$?

1.5*. Construir mediante la operación de superposición, utilizando sólo funciones del conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1, x \dot{-} 2y\}$, alguna de las funciones $j_i(x)$.

1.6. Sean $h_1(x) = \sim x$, $h_{i+1}(x) = x \supset h_i(x)$, $i \geqslant 1$. Demostrar que $J_{k-1}(x) = \sim h_{k-1}(x)$.

1.7. ¿Cuántas diferentes funciones de P_k dependientes sólo de la variable x se pueden representar en la forma x^l $(l \geqslant 1)$, en donde la potencia se toma por el módulo k?

Véanse los casos en los que $k = 3, 4, \ldots, 10$.

1.8. ¿Con qué valores de k $(k \geqslant 3)$ las funciones x^2, x^3 y x^4 son diferentes de par en par?

1.9*. Supongamos que por $P_k^{(1)}$ se designa el conjunto de todas las funciones de la lógica k-valente que dependen de una variable. Demostrar que $P_k^{(1)} \subseteq [1, J_{k-1}(x), x + y]$ en donde los corchetes sirven para designar la clausura de los respectivos conjuntos de funciones.

1.10. Demostrar que las relaciones siguientes son válidas:

1) $\sim(\bar{x} + y) = (\sim x) + (\sim y)$;
2) $\overline{\sim(\bar{x} \cdot \bar{y})} = (\sim x) \cdot \bar{y}$;
3) $x \dot{-} y = \text{máx}(x, y) - y$;
4) $\bar{x} \dot{-} \bar{y} = (x \dot{-} y) + \bar{x} \cdot j_{k-1}(y) + \bar{y} \cdot j_{k-1}(x)$;
5) $\bar{x} = \text{máx}((x+2) \dot{-} 1, J_{k-2}(x))$;
6) $\bar{x} = \text{mín}(\sim J_{k-1}(x), (k-2) \supset x)$;
7) $\text{máx}(\bar{x}, \bar{y}) = v_k(x, y) + \bar{x} \cdot j_{k-1}(y) + \bar{y} \cdot j_{k-1}(x)$;
8) $\text{máx}(\bar{x}, y) = \text{máx}(x, y) + j_0(y \dot{-} x) + j_{k-1}(x) \cdot y$;
9) $\text{mín}(\bar{x}, y) = \overline{\text{mín}(x, y)} + J_0(y \dot{-} x) - j_{k-1}(x) \cdot y$.

1.11. Aclarar si tiene lugar un «análogo» de la forma normal conjuntiva perfecta para las funciones de P_k, o sea comprobar si para cualquier función $f(\tilde{x}^n) \in P_k$ se cumple la igualdad

$$f(\tilde{x}^n) = \min_{\tilde{\sigma}} \{\text{máx}(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \sim J_{\sigma_1}(x_1), \sim J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, \sim J_{\sigma_n}(x_n))\}.$$

1.12. Para la k dada representar la función f en la primera y en la segunda forma.

1) $f = j_1(x)$, $k = 3, 4$;
2) $f = \sim x$, $k = 5$;
3) $f = J_0(x^2 \dot{-} x)$, $k = 6, 7$;
4) $f = \text{mín}(x, y)$, $k = 3$;
5) $f = x^2 \dot{-} y$, $k = 4$;
6) $f = x^2 \cdot y^2$, $k = 4$.

1.13. Descomponer la función f de P_k en un polinomio por módulo k.

1) $f = J_{k-2}(x)$, k es un número simple arbitrario;
2) $f = j_1(x^2 - x)$, k es un número simple arbitrario;
3) $f = x \dot{-} x^2$, $k = 5$;
4) $f = 3x \dot{-} (x \dot{-} 2x)$, $k = 7$;
5) $f = \text{mín}(x, y)$, $k = 3$;
6) $f = x \supset y$, $k = 5$;
7) $f = \text{máx}(x, j_2(y))$, $k = 7$.

1.14. Demostrar que siempre que k sea compuesto las funciones de P_k enumeradas a continuación no son representables con un polinomio por módulo k.

1) $j_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 1$;
2) $x \dot{-} y$;
3) $x \supset y$;
4) $\text{máx}(x, y)$;
5) $\text{mín}(x, y)$;
6) $(x \dot{-} y) \dot{-} z$.

7) cualquier función de Sheffer (o sea una función que forma en P_k un sistema completo).

1.15*. Demostrar, seleccionando para la función $f(x, y)$ de modo correspondiente tales polinomios $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, que aunque sea una de las funciones $Q_0(f(Q_1(x), Q_2(y)))$ o $Q_0(f(Q_1(x), Q_2(x)))$ sin ofrecer dudas no sea descomponible en un polinomio por módulo k; demostrar que con $k = 4, 6$ las funciones que van a continuación no son presentables con polinomios por módulo k.

1) $f = (2 \dot{-} x^3) \cdot \overline{y}$;
2) $f = ((\sim \overline{x}) + y) \dot{-} (\overline{x} \dot{-} 1)$;
3) $f = \text{mín}(\sim x, y) \dot{-} (1 \dot{-} x)$;
4) $f = \text{máx}(x, y) \dot{-} (x \dot{-} 2)$.

1.16*. Comprobar si la función f de P_k es representable con un polinomio por módulo k.

1) $f = (x \dot{-} y) \dot{-} y$, $k = 4$;
2) $f = 3j_0(x)$, $k = 6$;
3) $f = (\text{máx}(x, y) - \text{mín}(x, y))^2$, $k = 4$.

1.17. Las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ de P_3 satisfacen las condiciones

$$f_1(x) \not\equiv \text{const}, \quad f_1(E_3) \neq E_3$$

y

$$f_2(E_3) = E_3.$$

Demostrar que la función $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde la suma se hace por el módulo 3, omite aunque sea uno de los valores de E_3 o sea que $g(E_3) \neq E_3$.

1.18. La función $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ de P_3, donde $a_i \in E_3$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 3, no toma aunque sea un valor de E_3 (o sea que $f(E_3) \neq E_3$) ¿Qué valores pueden tomar los coeficientes a_0, a_1, a_2?

La función $f(\widetilde{x}^n)$ de P_k se llama *lineal por la variable* x_i ($1 \leqslant i \leqslant \leqslant n$) si es válida la representación

$$f(\widetilde{x}^n) = x_i \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

donde φ y ψ son ciertas funciones de P_k y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k.

La función $f(\widetilde{x}^n)$ de P_k se llama *fuertemente dependiente de la variable* x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) si en cualesquiera dos colecciones de valores de las variables que se diferencien sólo en la i-ésima componente, la función $f(\widetilde{x}^n)$ adquiere diferentes valores.

1.19*. 1) La función $f(\widetilde{x}^n)$ pertenece a P_3 y depende fuertemente de cada variable. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ es lineal para toda variable suya x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

2) Con los mismos supuestos acerca de la función $f(\widetilde{x}^n)$ demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ es una función lineal, o sea que se la puede representar en la forma $a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, donde $a_i \in E_3$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 3.

1.20*. 1) La función $f(\widetilde{x}^n)$ pertenece a P_k (donde k es un número primo), es diferente de una constante, y lineal respecto a cualquier variable suya. Demostrar que existe tal colección de valores de las variables en la cual la función $f(\widetilde{x}^n)$ se hace cero.

2) ¿Es válida una afirmación análoga con un k compuesto?

1.21. Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^n) \in P_k$ (donde k es un número primo) es lineal respecto a la variable x_1 y depende fuertemente de esta variable. Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ es representable en la forma $a \cdot x_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, donde $a \in E_k$, $a \neq 0$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k.

1.22. 1) Demostrar que la función $2j_i(x)$ de P_4 con cualquier $i = 0, 1, 2, 3$ es representable con un polinomio por módulo 4.

2) Demostrar que si una función de P_4 dependiente de una variable toma solamente los valores del conjunto $\{0, 2\}$ o bien sólo del conjunto $\{1, 3\}$, entonces es representable con un polinomio por módulo 4.

3*) Poner el ejemplo de una función de P_4 que dependa sustancialmente de dos variables, que tome sólo los valores 0 y 2 y que no sea descomponible en un polinomio por módulo 4.

1.23*. Demostrar que si la función $f(x) \in P_4$ no es representable con un polinomio por módulo 4, entonces con cualquier $m \geqslant 2$, la función $(f(x))^m$, igual al m-ésimo grado de la función $f(x)$, tampoco es representable con un polinomio por módulo 4.

1.24*. Hallar el número de funciones de P_4 que dependen solamente de la variable x y se realizan con polinomios por módulo 4.

1.25. 1) Sea la función $f(x) \in P_6$ representable con un polinomio por módulo 6. Demostrar que $f(x)$ se puede realizar con un polinomio por módulo 6 del tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

2*) Demostrar que en P_6 el número de funciones dependientes de la variable x y presentables con polinomios por módulo 6, es igual a 108.

1.26*. Enumerar todas las funciones $f(x)$ de P_6 que tienen la forma $a + b \cdot j_0(x)$ (aquí a y b pertenecen a E_6), que no se realizan con polinomios módulo 6 y tales que $(f(x))^2$ son presentables con polinomios por módulo 6.

1.27. 1) Supongamos que la función $\varphi(x, y) \in P_k$ satisface las condiciones:

1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
b) $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$;

c) cualesquiera que sean a y b del conjunto E_k, existe una única x, tal (dependiente de a y b) que $\varphi(a, x) = b$.

Por 0_a designaremos tal elemento de E_k que $\varphi(a, 0_a) = a$. Demostrar que $0_a = 0_b$ con cualesquiera a y b de E_k (o sea que $0_0 = 0_1 = \ldots = 0_{k-1}$).

OBSERVACION. Llamaremos a este «elemento común» (para todas las $a \in E_k$) *el cero de la función* φ y le designaremos por 0_φ.

2) Demostrar que si $k = 3$, entonces en calidad de la función $\varphi(x, y)$ se puede tomar sólo una de las funciones siguientes del conjunto P_3: $x + y$, $x + y + 1$, $x + y + 2$.

3*) Sea la función $\varphi(x, y) \in P_k$ que satisfaga las condiciones enumeradas en el punto 1). La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$ se llama *casi lineal con relación a* φ, si para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ que pertenezcan a E_k se cumple la igualdad

$$\varphi(f(\varphi(a_1, b_1), \varphi(a_2, b_2), \ldots, \varphi(a_n, b_n)), f(0_\varphi, 0_\varphi, \ldots, 0_\varphi)) = \\ = \varphi(f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)).$$

Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n) \in P_3$ es casi lineal con relación a $x + y + i$ (con un $i = 0, 1, 2$ fijado arbitrariamente) si, y sólo si, $f(\widetilde{x}^n)$ es una función lineal.

1.28. 1) Supongamos que la función $\varphi(x, y) \in P_k$ satisface las condiciones a)—c) del problema 1.27, 1). Demostrar que la función $\varphi(x, y)$ es casi lineal con relación a sí misma.

2) Demostrar que en P_4 existe una función no lineal $\varphi(x, y)$ que es casi lineal con relación a sí misma y es representable en la forma $x + y + axy$ (en donde $a \in E_4$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 4).

1.29. Sea $s(x)$ una función heterovalente[1]) de P_k dependiente de una variable. La función $g(x) \in P_k$ se llama inversa a la función $s(x)$ y se designa por $s^{-1}(x)$ si $g(s(x)) \equiv x$ (entonces es válida también la identidad $s(g(x)) \equiv x$). La función $f^{s(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s^{-1}(f(s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)))$ se llama *dual a la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *con relación a* $s(x)$. Si la función $f(\widetilde{x}^n)$ es dual

[1]) Una función de una variable de P_k se llama heterovalente si toma todos los valores k.

a sí misma con relación a $s(x)$, entonces se llama *autodual con relación a* $s(x)$.

1) Construir una fórmula sobre el conjunto $\{1, k-1, xy, x+y, \min(x, y)\}$ que realice una función dual a f con relación a $s(x)$.

1) $f = v_k(x, y)$, $s(x) = \sim x$;

b) $f = \min(x, y) + j_0(x) \cdot j_1(y) + j_1(x) \cdot j_0(y)$, $s(x) = x + j_0(x) + J_1(x)$;

c) $f = (x \dot{-} y) + z + x \cdot J_0(y) + y \cdot J_0(x)$, $s(x) = \bar{x}$;

d) $f = x + (y \dot{-} z) + x \cdot y \cdot z - y \cdot j_0(z)$, $s(x) = -x$.

2) Demostrar que si la función $f(\tilde{x}^n) \in P_k$

a) toma l diferentes valores $(1 \leqslant l \leqslant k)$ o

b) depende sustancialmente de m variables $(0 \leqslant m \leqslant n)$, entonces la función $f^{s(x)}(\tilde{x}^n)$, dual a ella, tiene las mismas propiedades.

3) Sea $s(x) = \bar{x}$. Aclarar con qué valores de k y del parámetro a (del conjunto E_k) la función $f(x, y)$ es autodual con relación a $s(x)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2a \cdot x \cdot y + y$;

b) $f(x, y) = \max(x, y) + a \cdot (x \dot{-} y) + 2x - 2y$;

c) $f(x, y) = x + j_0(x + ay)$.

4) Aclarar cuál de las funciones citadas a continuación es autodual con relación a $s(x) = -x$,

a) $\bar{x}$;

b) $\sim x$;

c) $j_1(x) + J_{k-1}(x)$;

d) $x + y$;

e) $(x \dot{-} y) + y$;

f) $x^2 \cdot y^2 \cdot z$;

g) $x \cdot y \cdot z + y \cdot J_{[k/2]}(z) + z \cdot J_{[k/2]}(y)$.

5) Demostrar que si la función $f(\tilde{x})$ es autodual con relación a las funciones $s_1(x)$ y $s_2(x)$, entonces es también autodual con relación a las funciones $s_1(s_2(x))$ y $s_1^{-1}(x)$.

1.30. Una función heterovalente $s(x) \in P_k$ se llama *ciclo* (o *sustitución cíclica*) si $s^i(0) \neq s^j(0)$[1] para cualesquiera i, j que satisfagan las condiciones $1 \leqslant i < j \leqslant k$ ($s^i(x)$, es la escritura abreviada de la expresión $\underbrace{s(s(\ldots s}_{i \text{ veces}}(x)\ldots)))$. Demostrar que si $s(x)$ es una sustitución cíclica de P_k, entonces en P_k el número de funciones autoduales con relación a $s(x)$ y dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a $k^{k^{n-1}}$.

1.31. Que sea r el menor número positivo[2]) tal que $s^r(x) \equiv x$. Demostrar que si $s(x) \not\equiv x$ y r es un simple divisor del número k,

[1]) En esta desigualdad en lugar de 0 se puede tomar cualquier otro elemento del conjunto E_k.

[2]) Corrientemente a este número se lo llama orden de la función (de la sustiución).

entonces en P_k el número de funciones autoduales con relación a $s(x)$ y dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a $k^{k^{n/r}}$.

1.32. Demostrar que si la función $f(\widetilde{x^n}) \in P_k$ es casi lineal con relación a $\varphi(x, y) \in P_k$ (véase el problema 1.27, 3)), entonces la función $f^{s(x)}(\widetilde{x^n})$, dual a $f(\widetilde{x^n})$ con relación a $s(x)$, es casi lineal con relación a $\varphi^{s(x)}(x, y)$.

§ 2. CLASES CERRADAS DE LA LOGICA k-VALENTE

La función $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, que transforma la n-ésima potencia cartesiana $E_k^n = \underbrace{E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}}$ del conjunto E_k en un conjunto $\{0, 1\}$[1]) se llama *predicado de n lugares determinado en el conjunto E_k*.

Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ es una función de P_k $(m \geqslant 1)$ y $R(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ es un predicado de n lugares determinado en E_k. Se dice que *la función f conserva el predicado R* si, cualesquiera que sean los elementos

$$a_{11}, \ldots, a_{1j}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}, \ldots \\ \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mj}, \ldots, a_{mn}$$

del conjunto E_k, las igualdades $R(a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}) = 1$ (para todos los $i = 1, \ldots, m$) llevan a la relación

$$R(f(a_{11}, \ldots, a_{i1}, \ldots, a_{m1}), \ldots, f(a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}), \ldots \\ \ldots, f(a_{1n}, \ldots, a_{in}, \ldots, a_{mn})) = 1.$$

Si la función f es constante (por ejemplo, $f \equiv a$), entonces según la definición *la función f conserva el predicado* $R(x_1, \ldots, x_n)$ si $R(a, \ldots, a) = 1$.

Por $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ designaremos *el conjunto de todas las funciones de P_k que conservan el predicado* $R(x_1, \ldots, x_n)$ determinado en el conjunto E_k.

2.1. Demostrar que el conjunto $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ con cualquier predicado R es una clase cerrada.

2.2. Sea $\mathscr{E}$ un subconjunto del conjunto E_k. Se dice que la función $f(x_1, \ldots, x_m)$ *conserva el conjunto* $\mathscr{E}$ si en cualquier colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tal que $\alpha_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, \ldots, m)$ la función toma el valor de $f(\widetilde{\alpha})$ también perteneciente al conjunto $\mathscr{E}$. *El*

---

[1]) En lugar del conjunto $\{0, 1\}$ se consideran también los conjuntos {V, F} o $\{t, f\}$, en los cuales V (respectivamente t) significa «verdadero» y F (respectivamente f) significa «falso».

conjunto de todas las funciones P_k que conservan el conjunto $\mathscr{E}$ se designa por $T(\mathscr{E})$ y se llama *clase de conservación del conjunto $\mathscr{E}$.*

1) Demostrar que $T(\mathscr{E}) = H(R(x))$ si el predicado $R(x)$ es igual a la unidad en el conjunto $\mathscr{E}$ y es igual a cero en el conjunto $E_k \setminus \mathscr{E}$.

2) Demostrar que $T(\mathscr{E}) \neq P_k$ si, y sólo si, $\mathscr{E}$ es diferente de un conjunto vacío y de todo el conjunto E_k.

3) ¿Cuántas clases cerradas diferentes existen en P_k que sean clases de conservación de los conjuntos?

4) Contar el número de funciones de P_k que se contienen en la clase $T(\mathscr{E})$ y dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

5) Demostrar que siempre que $\mathscr{E} \neq \varnothing$ y $\mathscr{E} \neq E_k$, la clase $T(\mathscr{E})$ es precompleta en P_k.

2.3. Sea $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ la partición del conjunto E_k, o sea que $E_k = \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{E}_s$, $\mathscr{E}_i \neq \varnothing$ con $i = 1, 2, \ldots, s$ y $\mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$. Se dice que los elementos a y b de E_k *son equivalentes respecto a la partición* D (la designación es: $a \sim b \pmod{D}$) si a y b pertenecen a cierto subconjunto $\mathscr{E}_j$ de la partición D. Dos colecciones $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ se llaman *equivalentes respecto a la partición D* (la designación es: $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta} \pmod{D}$) si $\alpha_i \sim \beta_i \pmod{D}$ con $i = 1, 2, \ldots, m$. Se dice que la función $f(\tilde{x}^m)$ de P_k *conserva la partición D* si para cualesquiera colecciones $\tilde{\alpha}^m$ y $\tilde{\beta}^m$ de la equivalencia $\tilde{\alpha}^m \sim \tilde{\beta}^m \pmod{D}$ se deduce la equivalencia $f(\tilde{\alpha}^m) \sim f(\tilde{\beta}^m) \pmod{D}$. *El conjunto de todas las funciones de P_k que conservan la partición* $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ se designa por $U(D)$ o $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s)$ y se llama *clase de conservación de la partición D.*

1*) Demostrar que $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s) = H(R(x, y))$ si el predicado $R(x, y)$ es igual a la unidad en tales y solamente en tales pares (a, b) que están formados de elementos equivalentes respecto a la partición $\{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$.

2) Demostrar que $U(D) = P_k$ si, y sólo si, la partición $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ es *trivial* o sea que o bien D se induce *con la relación de igualdad* (en este caso $s = k$), o bien D se representa con una relación de dos lugares *universal* (o *completa*), lo que corresponde a $s = 1$.

3) Para $k = 3, 4, 5$ contar el número de diferentes clases cerradas en P_k, que sean clases de conservación de las particiones.

4*) Contar el número de funciones de P_k que se contienen en la clase $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s)$ y que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

2.4. Sea $\mathscr{E}$ un subconjunto no vacío de E_k diferente de todo E_k y $D = \{\mathscr{E}, E_k \setminus \mathscr{E}\}$. Contar el número de funciones de P_k que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$ y que se contienen en el conjunto

1) $T(\mathscr{E}) \setminus U(D)$; 2) $U(D) \setminus T(\mathscr{E})$; 3) $T(\mathscr{E}) \cup U(D)$.

2.5. Sea $R(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, un predicado determinado en el conjunto E_k. Se le llama *predicado plenamente reflexivo* si en cualquier colección de valores de las variables que contiene aunque sea dos componentes iguales él se convierte en una unidad. El predicado $R(\widetilde{x}^n)$ se llama *plenamente simétrico* si con cualquier conmutación de las variables en $R(x_1, \ldots, x_n)$ se obtiene el predicado $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ que coincide con el predicado inicial $R(\widetilde{x}^n)$. Los predicados de un lugar se consideran (por definición) también plenamente reflexivos y plenamente simétricos. El predicado plenamente simétrico y plenamente reflexivo $R(x_1, \ldots, x_n)$ se llama *central* si existe un elemento $c \in E_k$ tal que $R(c, x_2, \ldots, x_n) = 1$ con cualesquiera valores de las variables $x_2, \ldots, x_n$ (el elemento c que satisface la condición indicada se llama *central* y todos los elementos tales del predicado R forman su *centro*).

1*) Demostrar que existen exactamente

$$\sum_{i=1}^{k-2} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} 2^{\binom{k-i}{2}} + (-1)^k (k-1)$$

diferentes predicados centrales de dos lugares, determinados en el conjunto E_k.

2) Comprobar que para cada $n \geqslant k$ existe sólo un predicado central de n lugares, determinado en el conjunto E_k.

3) Enumerar todos los predicados centrales determinados en el conjunto E_k cuyos centros contienen exactamente $k-1$ elementos.

4*) Demostrar que si $R(x_1, \ldots, x_n)$ es un predicado central determinado en el conjunto E_k, entonces $H(R(x_1, \ldots, x_n)) = P_k$ si, y sólo si, el centro del predicado R coincide con E_k.

2.6. Sean $\mathscr{E} \subseteq E_k$ y $s \in \{1, \ldots, k\}$. Por $T(\mathscr{E}, s)$ designaremos el subconjunto de P_k formado por *todas las constantes y todas las funciones* $f(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 1$, *que satisfacen la condición*: para cualquier sistema $\{A_1, \ldots, A_m\}$ de subconjuntos del conjunto E_k, tales que cada uno de ellos contiene exactamente s elementos, se encontrará un conjunto $A_0 \subseteq E_k$ que también contiene s elementos y es tal que $f(\mathscr{E} \cup A_1, \ldots, \mathscr{E} \cup A_m) \subseteq \mathscr{E} \cup A_0$.

1) Demostrar que el conjunto $T(\mathscr{E}, s)$ es una clase cerrada en P_k.

2) Mostrar que $T(\mathscr{E}, s) = P_k$ si, y sólo si, o bien $\mathscr{E} \neq \varnothing$ y $s \geqslant k - |\mathscr{E}|$, o bien $\mathscr{E} = \varnothing$ y $s = 1$ o k.

3*) Demostrar que $T(\varnothing, 2) \subset T(\varnothing, 3) \subset \ldots \subset T(\varnothing), k-1)$ y $T(\varnothing, k-1)$ es una clase precompleta en P_k.

4) Mostrar que el número de diferentes clases cerradas en P_k que sean clases del tipo $T(\mathscr{E}, s)$, donde $1 \leqslant s \leqslant k$, es igual a $1 + 2^{k-1}(k-2)$.

5*) Demostrar que siempre que $\mathscr{E} \neq \varnothing$, es válida la igualdad $T(\mathscr{E}, s) = H(R(x_1, \ldots, x_{s+1}))$, donde R es un predicado central de $s+1$ lugares con el centro $\mathscr{E}$ que satisface la condición: $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}) = 0$ solamente cuando los componenetes de la

colección $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1})$ son diferentes y ninguno de ellos pertenece al centro.

6) Hallar el número de funciones de la lógica k-valente P_k dependientes de la variable x y pertenecientes al conjunto $T(\{0\}, 1)$.

2.7. Por S_k se designa *el conjunto de todas las funciones heterovalentes de P_k que dependen de una variable* (o sea que $g(x)$ pertenece a S_k si, y sólo si, $g(E_k) = E_k$). Designaremos por $P_k^{(1)}$ *el conjunto de todas las funciones P_k de la lógica k-valente dependientes de una variable*. Sea $CS_k = P_k^{(1)} \setminus S_k$.

1) Mostrar que los conjuntos S_k y CS_k son clases cerradas.

2) Hallar el número de funciones dependientes de la variable x y pertenecientes a la clase $S_k \cap U(\{0, k-2\}, \{1, \ldots, k-3\}, \{k-1\})$.

2.8. Supongamos que $s(x) \in S_k$. Por $Z(s(x))$ designaremos *el conjunto de todas aquellas funciones de P_k que son autoduales con respecto a $s(x)$* (véase la definición de función autodual en el párrafo 1 de este capítulo).

1) Demostrar que $Z(s(x))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $Z(s(x)) = P_k$ si, y sólo si, $s(x) \equiv x$.

3) Demostrar que $Z(s(x)) \subseteq Z(s^i(x))$ con cualquier $i \geqslant 0$ ($s^0(x)$ por definición se supone igual a x).

2.9. Supongamos que $s(x) \in S_k$. Designemos por $\widetilde{Z}(s(x))$ *el conjunto de todas aquellas funciones $f(\widetilde{x}^n)$ de P_k $(n \geqslant 1)$ que satisfacen la condición*: cualesquiera que sean los números enteros $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se podrá encontrar un número entero i (para cada función el suyo), tal que $f(s^{i_1}(x), s^{i_2}(x), \ldots, s^{i_n}(x)) \equiv s^i(x)$.

1) Mostrar que $\widetilde{Z}(s(x))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $\widetilde{Z}(s(x)) \neq P_k$ con cualquier función $s(x)$.

3) Demostrar que $\widetilde{Z}(s(x)) = Z(s(x))$ si, y sólo si, $s(x)$ es una sustitución cíclica (véase el problema 1.30).

2.10. Refutar la afirmación: con cualquier función $s(x)$ de S_k se cumple la igualdad $Z(s^2(x)) = \widetilde{Z}(s^{-1}(x))$.

2.11. Examinemos la función $\varphi(x, y)$ de P_k que satisface todas las condiciones enumeradas en el problema 1.27, 1). Designemos por $L(\varphi(x, y))$ *el conjunto de todas las funciones de P_k que son casi lineales con relación a $\varphi(x, y)$*. Si $\varphi(x, y) = x + y$, entonces el conjunto $L(\varphi(x, y))$ en algunas ocasiones se designa por L y sus elementos se llaman *funciones lineales*.

1) Demostrar que $L(\varphi(x, y))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $L(\varphi(x, y)) \neq P_k$ para cualquier función $\varphi(x, y)$.

3*) Comprobar si es justa la afirmación: en P_4 para toda función $s(x) \in S_4$, las clases $L(\varphi(x, y))$ y $L(\varphi^{s(x)}(x, y)$ coinciden.

Supongamos que en el conjunto E_k se ha dado cierta relación ρ de un orden parcial no estricto. Se dice que la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *precede* a la colección $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ [1])

[1]) O la colección β *sucede* a la colección α.

con el ordenamiento ρ (la designación es: $\widetilde{\alpha}\rho\widetilde{\beta}$) si para cualquier $i = 1, \ldots, n$ se cumple la relación $\alpha_i\rho\beta_i$. Las colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ se llaman *comparables con relación a* ρ si bien $\widetilde{\alpha}\rho\widetilde{\beta}$, o bien $\widetilde{\beta}\rho\widetilde{\alpha}$. La relación ρ corresponde en forma natural a un predicado de dos lugares $R_\rho(x, y)$, igual a 1 en aquellos y solamente en aquellos pares $(a, b) \in E_k \times E_k$ para los cuales es válida la relación $a\rho b$. La función $f(\widetilde{x}) \in P_k$ se llama *monótona con respecto a* ρ si para cualesquiera colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de $\widetilde{\alpha}\rho\widetilde{\beta}$ se deduce que $f(\widetilde{\alpha})\rho f(\widetilde{\beta})$. En otras palabras, $f(\widetilde{x})$ es monótona respecto a ρ si ella *conserva el predicado* R_ρ que corresponde a la relación ρ. Designaremos por $M(\rho)$ al conjunto $H(R_\rho(x, y))$, o sea al *conjunto de todas las funciones de* P_k *que son monótonas respecto a* ρ.

2.12. 1) Veamos dos relaciones de un orden parcial no estricto determinadas en el conjunto E_k:

$$\rho_1 = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(1, i)\} \cup \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{i=2}^{k-1} \{(0, i)\} \cup \bigcup_{i=2}^{k-1} \{(i, i), (i, i+1), \ldots, (i, k-1)\},$$

$$\rho_2 = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(0, i)\} \cup \{(1, 1), (2, 2)\} \cup \bigcup_{i=3}^{k-1} \{(i, i), (i, i+1), \ldots, (i, k-1)\}.$$

Aclarar cuáles de las funciones citadas a continuación pertenecen a los conjuntos $M(\rho_1)$ o $M(\rho_2)$.

a) $\overline{x}$;
b) $J_1(x)$;
c) $j_2(x)$;
d) $x + j_0(x) + J_1(x)$;
e) $\text{máx}(x, y)$;
f) $x \dot{-} y$;
g) $2x + j_{k-1}(y)$.

2) Sin emplear el concepto de clase de conservación del predicado $R_\rho(x, y)$, demostrar que $M(\rho)$ es una clase cerrada.

3) Mostrar que $M(\rho) = P_k$ si, y sólo si, la relación ρ es una relación de igualdad (o sea en el caso de que $\rho = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(i, i)\}$.

2.13. Seleccionando una clase del tipo $T(\mathscr{E})$ o $U(D)$ idónea, demostrar que el sistema A no es completo en P_k.

1) $A = \{\sim x, \text{mín}(x, y), x \cdot y^2\}$;
2) $A = \{2, j_0(x), x + j_0(x) + J_1(x) + J_{k-1}(x), \text{mín}(x, y)\}$;
3) $A = \{2x^3, 2x + y, x^2 \cdot y, x \cdot J_0(y), \overline{x} + (\sim y)\}$;
4) $A = \{J_2(x), \overline{x + j_0(x)}, x + j_0(x) + J_1(x), \text{máx}(x, y)\}$;
5) $A = \{1, 2, \overline{x \dot{-} j_2(x)}, \text{máx}(x, y)\}$;
6) $A = \{j_2(x), x + j_0(x) + J_1(x), x \cdot y, x \dot{-} y, \text{mín}(x, y)\}$.

2.14. Para la demostración de la no plenitud (en P_k) del sistema A aclarar con qué valores de k no es suficiente examinar sólo las clases del tipo $T(\mathscr{E})$, $U(D)$ y $M(\rho)$, sino que también hay que emplear clases del tipo $T(\mathscr{E}, s)$.

1) $A=\{2j_0(x),\ J_1(x),\ x+j_0(x)+J_1(x),\ x\cdot j_0(y)\}$;

2) $A=\{1,\ \sim x,\ j_0(x),\ \text{máx}(x, y)\}$;

3) $A=\{0, 1, \ldots, k-2,\ J_{k-1}(x),\ \text{máx}(x, y),\ \text{mín}(x, y)\}$;

4) $A=\{\sim x,\ [k/2]\cdot j_0(x \dot{-} [(k-1)/2]),\ J_0(x)+$
$+(x \dot{-} 1),\ \text{mín}(x, y)\}$.

2.15. ¿Se puede demostrar la no plenitud (en P_k) del sistema A, empleando sólo las clases L y $Z(s(x))$?

1) $A=\{\bar{x},\ 2x-y,\ \text{máx}(x, y)-(x \dot{-} y)\}$;

2) $A=\{0,\ 1,\ -x,\ 2x+y,\ x+(\sim y)\}$;

3) $A=\{j_1(x)+J_{k-1}(x),\ x-y,\ x\cdot y\cdot z\}$;

4) $A=\{\bar{x},\ -x+2y,\ x_0+j_0(x-y)\}$;

5) $A=\{\sim x,\ \text{mín}(\bar{x}, y),\ x\cdot y\}$.

2.16*. Dos funciones en P_k se llaman *congruentes* si una de ellas puede ser obtenida de la otra mediante la sustitución de las variables sin identificación (comparar con el párrafo 1 del capítulo II). Sea la función $f(x, y)=2j_1(x)\cdot j_2(y) \in P_3$. Demostrar que la clase cerrada $[f(x, y)]$ contiene un número finito de funciones congruentes de par en par (comparar con el problema 1.5 del capítulo II).

2.17. Sea A un conjunto no vacío de funciones de un lugar de la lógica k-valente diferente de todo el conjunto $P_k^{(1)}$ y que satisface la condición: existe tal clase precompleta B en P_k que $B \cap P_k^{(1)}=A$. Demostrar que ella es única.

2.18*. Demostrar que el número de clases precompletas en P_k, cada una de las cuales no contiene totalmente el conjunto $P_k^{(1)}$, es menor que 2^{k^k}.

2.19. Demostrar que si una clase cerrada en P_k tiene un sistema finito y completo (en ella), entonces ella tiene el conjunto de todas (las diferentes) bases no más que numerable.

2.20*. ¿Es válida la afirmación siguiente? Toda clase cerrada en P_k ($k \geqslant 3$) que contiene una función diferente de una constante contiene también una función que depende sustancialmente de una variable.

2.21*. ¿Es cierto que si a una clase cerrada en P_k ($k \geqslant 3$) le pertenece una función que depende sustancialmente de no menos que de dos variables, entonces en esta clase se contiene o bien una función x, o bien una constante?

2.22. Sea $s(x)$ una función heterovalente de P_k. Por $A^{s(x)}$ designaremos el conjunto de aquellas, y solamente de aquellas, funciones de P_k para las cuales en el conjunto A hay funciones duales con relación a $s(x)$. El conjunto $A^{s(x)}$ se llama *dual a A con relación a s(x)*. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1) El conjunto $(A^{s_1(x)})^{s_2(x)}$, dual a $A^{s_1(x)}$ con relación a $s_2(x)$, coincide con el conjunto A si, y sólo si, $s_1(s_2(x)) \equiv x$ o bien cuando él es dual a sí mismo con relación a cada una de las sustituciones $s_1(x)$ y $s_2(x)$.

2) El conjunto A es una clase cerrada si, y sólo si, $A^{s(x)}$ es una clase cerrada.

3) Si el conjunto B forma un sistema completo (o una base) en la clase cerrada A, entonces el conjunto $B^{s(x)}$ es un sistema completo (y respectivamente una base) en la clase $A.^{s(x)}$

4) Si $A_1 \supseteq A_2$, entonces $A_1^{s(x)} \supseteq A_2^{s(x)}$.

2.23*. Como ya se sabe, en P_k, siempre que $k \geqslant 3$, existen clases cerradas que no tienen bases y clases cerradas con bases numerables. Una de las clases cerradas que tiene bases numerables es la clase siguiente:

$$A_k = [f_2, \ldots, f_m, \ldots],$$

donde

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 1 \text{ con } x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots \\ \qquad \ldots = x_m = 2, \ x_i = 1 \ (i = 1, \ldots, m), \\ 0 \text{ en los demás casos,} \end{cases}$$

$m \geqslant 2$. Base en A_k es el conjunto $\{f_2, \ldots, f_m, \ldots\}$. Demostrar, empleando la clase A_k que en P_k $(k \geqslant 3)$ existe un conjunto continual $\{B_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$ de clases cerradas que forman (por inclusión) una cadena, o sea que para cualesquiera dos clases B_{γ_1} y B_{γ_2} del conjunto $\{B_\gamma\}$ es justa una de las inclusiones:

$$B_{\gamma_1} \subset B_{\gamma_2} \quad \text{o} \quad B_{\gamma_2} \subset B_{\gamma_1}.$$

§ 3. ESTUDIO DE LA PLENITUD DE LAS FUNCIONES DE LA LOGICA k-VALENTE

En las lógicas k-valentes el estudio de la plenitud de un sistema arbitrario de funciones está ligado a grandes dificultades técnicas: el empleo del criterio de la plenitud, que se basa en el examen conjunto de todas las clases precompletas en P_k, incluso con $k = 3, 4$, exige la investigación de un número muy considerable de condiciones (puesto que en P_3 existen exactamente 18 y en P_4, 82 clases precompletas). Las demostraciones de la plenitud de sistemas concretos en P_k corrientemente se hace con ayuda del método de reducción a sistemas que son, sin ofrecer dudas, completos (tales, por ejemplo, como el *sistema de Rosser—Turquette* $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$ o el *sistema de Post*, $\{\bar{x}, \text{máx}(x, y)\}$). Existe, aparte de eso, una serie de indicios de la plenitud en los que se examinan conjuntos

de funciones que contienen ciertas reuniones de funciones de una variable y, además, una sola función, sustancialmente dependiente por lo menos de dos variables. Definamos los más importantes de estos indicios. Recordaremos que S_k es el conjunto de todas las funciones no equivalentes de P_k, dependientes de una variable, y $CS_k = P_k^{(1)} \setminus S_k$, donde $P_k^{(1)}$ es el conjunto de todas las funciones de un lugar de P_k. La función $f(\tilde{x}) \in P_k$ se llama *sustancial* si depende sustancialmente de no menos que de dos variables y toma todos los k valores del conjunto E_k.

TEOREMA 1 (criterio de Slupetsky). *El sistema $P_k^{(1)} \cup \{f(\tilde{x})\}$ es completo en P_k (con $k \geqslant 3$) si, y sólo si, $f(\tilde{x})$ es una función sustancial.*

TEOREMA 2 (criterio de Yablonsky). *El sistema $CS_k \cup \{f(\tilde{x})\}$ es completo en P_k (con $k \geqslant 3$) si, y sólo si, $f(\tilde{x})$ es una función sustancial.*

TEOREMA 3 (criterio de Sálomaa). *El sistema $S_k \cup \{f(\tilde{x})\}$ es completo en P_k (con $k \geqslant 5$) si, y sólo si, la función $f(\tilde{x})$ es sustancial.*

Al emplear estos teoremas son útiles las afirmaciones que dan diversos criterios de la plenitud de los sistemas de funciones en los conjuntos $P_k^{(1)}$, S_k, CS_k. Citaremos uno de tales resultados. Supongamos que la función $h_{ij}(x)$ (donde $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$) se determina de la siguiente manera:

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} i & \text{si } x = j, \\ j & \text{si } x = i, \\ x & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

TEOREMA 4 (S. Picard). *Cada uno de los sistemas $\{\bar{x}, h_{01}(x), x + j_0(x)\}$ y $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \ldots, h_{0(k-1)}(x), x + j_0(x)\}$ es completo en $P_k^{(1)}$.*

3.1. Como ya se sabe (véase el párrafo 1), el sistema
$A = \{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x), x + y, x \cdot y\}$
es completo en P_k.

1*) Demostrar que del sistema A se puede seleccionar un subsistema completo en P_k que esté formado de dos funciones.

2) Mostrar que cualquier subsistema del sistema A formado de una función no es completo en P_k.

3.2. EL SISTEMA DE ROSSER–TURQUETTE

$$A_1 = \{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \\ \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\},$$

como se sabe es completo en P_k (véase el párrafo 1).

1) Mostrar que:

$$A_1 \setminus \{\text{mín}(x, y)\} \subset T_{\{2, \ldots, k-1\}, 1},$$
$$A_1 \setminus \{\text{máx}(x, y)\} \subset T_{\{0, \ldots, k-3\}, 1}$$

(consecuentemente, después de eliminar del sistema A_1 cualesquiera de las funciones mín (x, y) y máx (x, y) se obtiene un sistema no completo en P_k).

2) Comprobar que eliminando de A_1 cualquiera de las constantes diferentes de 0 y de $k-1$ se obtiene un subsistema que se contiene en cierta clase del tipo $T(\mathcal{E})$, donde $\varnothing \neq \mathcal{E} \neq E_k$ (y, en consecuencia, no completo en P_k).

3) Convencerse de la validez de las igualdades:

a) $J_0(x) = J_1(\text{máx}(1, J_1(x), \ldots, J_{k-2}(x), x))$

b) $J_{k-1}(x) = J_0(\text{máx}(J_0(x)\ J_1(x), \ldots, J_{k-2}(x)))$.

4) Seleccionar de un sistema de Rosser—Turquette completo en P_k un subsistema que esté formado de $2k-2$ funciones.

3.3. Aclarar si son completos en P_3 los siguientes subsistemas del sistema de Rosser—Turquette

1) $\{1,\ J_0(x),\ J_2(x),\ \text{mín}(x, y),\ \text{máx}(x, y)\}$;
2) $\{1,\ 2,\ J_2(x),\ \text{mín}(x, y),\ \text{máx}(x, y)\}$.

3.4. Investigar la plenitud en P_4 de los siguientes subsistemas del sistema de Rosser—Turquette

1) $\{1,\ 2,\ J_0(x),\ J_1(x),\ \text{mín}(x, y),\ \text{máx}(x, y)\}$;
2) $\{1,\ 2,\ J_0(x),\ J_3(x),\ \text{mín}(x, y),\ \text{máx}(x, y)\}$.

3.5. Demostrar que los sistemas citados a continuación son completos en P_k si, y sólo si, k es un número primo.

1) $\{1,\ x+y+xz\}$;
2) $\{x-1,\ x+y,\ x^2\cdot y\}$;
3*) $\{1+x_1-x_2+x_1x_2\ldots x_k\}$.

3.6. Empleando el método de reducción a sistemas completos que no ofrecen dudas, demostrar la plenitud (en P_k) de los sistemas siguientes:

1) $\{1,\ x^2-y,\ \text{mín}(x, y)\}$;
2) $\{k-1,\ x \dot{-} y,\ x+y\}$;
3) $\{\sim x,\ x+2,\ x \dot{-} y\}$;
4) $\{k-2,\ x+y,\ (\sim x) \dot{-} 2y\}$;
5) $\{1,\ 2x+y+z,\ x^2 \dot{-} y\}$;
6) $\{-x,\ 1-x^2,\ x \dot{-} y\}$;
7) $\{\bar{x}\cdot j_0(y),\ \text{mín}(x, y)\}$.

3.7. Empleando el criterio de Slupetsky demostrar la plenitud en P_k de los sistemas siguientes:

1) $\{f(x, y)\}$, donde

$$f(x, y) = \begin{cases} x+1 & \text{con } x=y, \\ x & \text{con } x \geqslant 2 \text{ e } y=0, \\ y & \text{con } x=0 \text{ e } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{en los demás casos;} \end{cases}$$

2) $\{j_2(x),\ x+y^2,\ x\cdot y+1\}$;

3) $\{\overline{x}\cdot j_0(y)+y\cdot j_0(x)\}$;

4) $\{k-1,\ 2x-y,\ x^2 \dot{-} y\}$.

3.8. Investigar la plenitud en P_k de los sistemas siguientes:

1) $\{k-2,\ x+y,\ \text{mín}(x,\ y)\}$;

2) $\{0,\ 1,\ \overline{x} \dot{-} (\sim y)\}$;

3) $\{1,\ 2,\ \overline{x \dot{-} y}\}$;

4) $\{2,\ 2x+y,\ x^2 \dot{-} y\}$;

5) $\{1,\ 2,\ \text{máx}(\overline{x},\ y)\}$;

6) $\{2 \dot{-} x,\ \text{máx}(x,\ y),\ x\cdot y)\}$;

7) $\{\sim x,\ 2j_0(x),\ J_1(x),\ x \dot{-} y\}$.

3.9. Demostrar que cada uno de los sistemas que se citan a continuación es completo en S_k.

1) $\{h_{01}(x,\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0(k-1)}(x)\}$;

2) $\{h_{01}(x,\ h_{12}(x),\ \ldots,\ h_{l(l+1)}(x),\ \ldots,\ h_{(k-2)(k-1)}(x)\}$;

3) $\{\overline{x},\ h_{01},\ x\}$.

3.10. Demostrar que el sistema $\{h_{01}(x),\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0(k-1)}(x),$ $x+j_0(x)\}$ es completo en $P_k^{(1)}$.

3.11. Demostrar que en P_k existe solamente una clase precompleta que contiene totalmente el conjunto $P_{k}^{(1)}$ y que esa clase es $T(\varnothing,\ k-1)$ (véase el problema 2.6, 3).

3.12. Sea A cierto sistema finito de funciones de P_k. Veamos el procedimiento siguiente:

1) identificamos en todas las funciones de A las variables sustituyéndolas por x (obtenemos el conjunto A_1);

2) en el lugar de las variables en las funciones de A, de todas las maneras posibles, colocamos funciones del conjunto $A_1 \cup \{x\}$ (obtenemos el conjunto A_2 de $P_k^{(1)}$); después

3) en las funciones de A en el lugar de las variables colocamos funciones del conjunto $A_2 \cup A_1 \cup \{x\}$, etc.

Demostrar que:

a) en cierto paso el proceso se estabiliza, o sea que con $i \geqslant i_0$ se cumplirá la igualdad $\{x\} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{i} A_j = \{x\} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{i+1} A_j$ (y la igualdad $A_i = A_{i+1}$);

b) el sistema A es completo en P_k si, y sólo si, se puede hallar tal i_0 que $\{x\} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{i_0} A_j = P_k^{(1)}$ y en A se contiene una función sustancial.

3.13. Demostrar, empleando el algoritmo descrito en el problema 3.12, que:

1) el sistema $\{x^2 + y + 2\}$ no es completo en P_3;

2) el sistema $\{x^2y + 1\}$ es completo en P_3.

3.14*. Demostrar la plenitud del sistema A transformándolo con ayuda de una sustitución adecuada $s(x)$ a un sistema $A^{s(x)}$ que, sin ofrecer dudas, sea completo.

1) $\{x - 1, \text{mín}(x, y)\}$;

2) $\{\sim j_{k-1}(x), x + y + 1\}$;

3) $\{1 + \bar{x} j_{k-1}(y) + \bar{y} \cdot j_{k-1}(x) + \text{máx}(x, y)\}$.

3.15*. Refutar la afirmación siguiente: con un k fijo en la lógica k-valente siempre se podrá encontrar una base formada por un número (finito) de funciones tan grande como se quiera.

3.16. Poner el ejemplo de una función $f(x, y)$ del conjunto P_3 que satisfaga la condición: f es una función de Sheffer, pero $x + f$ no es función shefferiana.

3.17*. Supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ es una función de P_k que depende sustancialmente de no menos que de dos variables y que toma l valores diferentes $(2 \leqslant l \leqslant k)$. Demostrar que sustituyendo sus variables por funciones del conjunto CS_k se puede obtener una función que dependa sustancialmente de dos variables y que tome l valores diferentes.

3.18. ¿Con qué valores de k el cuadrado de cualquier función sustancial de P_k es una función sustancial?

3.19*. Contar el número de funciones sustanciales en P_k que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$.

3.20. Sea $R(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado determinado en el conjunto E_k. Este se llama predicado *fuerte* si existe tal colección $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$, que para cada colección $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, en la que el predicado $R(x_1, \ldots, x_n)$ es igual a uno, se podrá encontrar en $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ una función $f(x)$ que satisfaga la condición: $f(\alpha_i) = \beta_i$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$ (en otras palabras, la función $f(x)$ «traduce» la colección $\tilde{\alpha}^n$ a la colección $\tilde{\beta}^n$). Supongamos que $R(\tilde{x})$ es un predicado fuerte determinado en el conjunto E_k y que $H(R(\tilde{x})) \neq P_k$. Demostrar que si con cualquier función $g(x)$ dependiente de una variable y no perteneciente a la clase $H(R(\tilde{x}))$, el sistema $H(R(\tilde{x})) \cup \{g(x)\}$ es completo en P_k, entonces, la clase $H(R(\tilde{x}))$ es precompleta en P_k.

3.21. Sea $R_i(\tilde{x}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, un predicado de n lugares determinado en el conjunto E_k. Pongamos que $R(\tilde{x}^n) = R_1(\tilde{x}^n) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_s(\tilde{x}^n)$. Demostrar que $\bigcap_{i=1}^{s} H(R_i(\tilde{x}^n)) \subseteq H(R(\tilde{x}^n))$.

3.22*. Demostrar que en P_k con $k \geqslant 3$ el conjunto de todas las clases cerradas, cada una de las cuales contiene un número finito de funciones no congruentes de par en par, es numerable-infinito.

3.23*. Demostrar que cada clase cerrada en P_k tiene no más que un conjunto numerable de clases precompletas en él.

3.24*. Poner un ejemplo de una clase cerrada en P_k que contenga infinitamente muchas funciones no congruentes de par en par y que no contenga clases precompletas en ella.

3.25*.. Seleccionar la base del sistema A completo en P_k.

1) $A = \{k-1,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x \cdot y,\ x \dot{-} y\}$;
2) $A = \{x-2,\ J_0(x),\ \text{máx}(x, y),\ x \dot{-} y^2,\ x^2 \cdot y\}$;
3) $A = \{\sim x,\ \text{mín}(x, y),\ x \cdot y,\ x+y\}$;
4) $A = \{k-1,\ x+2,\ \text{máx}(x, y),\ x \dot{-} y\}$;
5) $A = \{2,\ j_0(x),\ x+y^2,\ x^2 \dot{-} y,\ x \cdot y \cdot z\}$.

3.26. Demostrar que en cualquier base seleccionada del sistema Rosser — Turquette forzosamente tiene que contenerse aunque sea una de las funciones $J_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k-2$, pero no se encontrarán las constantes 0 y $k-1$.

Capítulo IV

GRAFOS Y REDES

§ 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS[1]

Sea V un conjunto finito no vacío, X, cierta colección de pares de elementos de V. En el conjunto X pueden haber pares con elementos iguales y también pares iguales. El conjunto V y la colección X determinan un *grafo con aristas y bucles* (lazos) *múltiples* (o abreviadamente un *pseudografo*) $G = (V, X)$. Los elementos del conjunto V se llaman *vértices* y los elementos de la colección X, *arcos* del pseudografo. Los arcos del tipo (v, v) $(v \in V)$ se llaman *lazos*. Un pseudografo sin lazos se llama *grafo con arcos múltiples* (o abreviadamente *multigrafo*). Si en la colección X no se puede encontrar ningún par más de una vez, entonces el multigrafo $G = (V, X)$ se llama *grafo*[2]. Si en el conjunto X los pares están ordenados, entonces el grafo se llama *orientado*. Las aristas de un grafo orientado frecuentemente se denominan *arcos*. Si los pares de la colección X no están ordenados, entonces el grafo se llama *no orientado* o sencillamente *grafo*. Si $x = (u, v)$ es una arista del grafo, entonces los vértices u y v se llaman *extremos* de la arista x. Si el vértice v es un extremo de la arista x, entonces se dice que v y x son *incidentes*. Los vértices u y v del grafo G se llaman *adyacentes* si existe una arista del grafo G que une a u y v. Dos aristas se llaman *adyacentes* si ellas tienen un vértice común. *Grado del vértice* v se llama al número $d(v)$ de aristas del grafo que son incidentes al vértice v. En un pseudografo el grado del vértice v es igual al número total de aristas incidentes a este vértice más el número de bucles incidentes a él. El vértice de un grafo que tiene grado 0 se llama *aislado* y el vértice que tiene grado 1, *colgante*.

[1]) Las definiciones que se dan a continuación coinciden o se aproximan a las que se dan en la sección «Grafos y redes» de los libros [10] y [33].

[2]) A continuación todas las definiciones se dan para los grafos. Generalmente estas definiciones de manera evidente se pueden aplicar a los multigrafos y pseudografos. En los casos de que haya gran diferencia en las definiciones, se darán también las definiciones respectivas para los pseudografos.

La sucesión

$$v_1x_1v_2x_2v_3 \ . \ . \ . \ x_{n-1}v_n \qquad (n \geqslant 2), \qquad (1)$$

en la que se alternan los vértices y las aristas y en la que para cada $i = \overline{1, n-1}$ la arista x_i tiene la forma (v_i, v_{i+1}), se llama *camino* que une los vértices v_1, v_n. El número de aristas del camino se denomina *longitud del camino*. *Camino de longitud* cero se llama a una sucesión que contiene un solo vértice. Un camino en el que todas las aristas son diferentes de par en par se llama *cadena*. Un camino en el que todos los vértices son diferentes de par en par se llama *cadena simple*. Un camino (1) se llama *cerrado* si $v_1 = v_n$. Un camino cerrado en el que todas las aristas son diferentes de par en par se llama *ciclo*. Un ciclo en el que todos los vértices, excepto el primero y el último, son diferentes de par en par se llama *ciclo simple*. Un grafo se llama *conexo* si para cualesquiera dos de sus vértices existe una cadena que une estos vértices. *Distancia* entre los vértices de un grafo conexo se llama a la longitud de la cadena más corta que une estos vértices. *Diámetro* de un grafo conexo se llama a la distancia entre los dos vértices más lejanos uno del otro. El diámetro del grafo G se designa por $D(G)$. *Subgrafo* del grafo G se llama a un grafo en el que todos los vértices y aristas se contienen entre los vértices y aristas del grafo G. Un subgrafo se llama *propio* si es diferente del mismo grafo. *Componente de conexión* del grafo G se llama su subgrafo conexo que no sea subgrafo propio de ningún otro subgrafo conexo del grafo G. *De soporte* se llama a un subgrafo que contenga todos los vértices del grafo. *Subgrafo* del grafo $G = (V, X)$ (*engendrado por el subconjunto* $U \subseteq V$ se llama al grafo $H = (U, Y)$ el conjunto de las aristas del cual está formado de aquellas, y solamente de aquellas, aristas del grafo G cuyos extremos se encuentran en U. Los grafos (pseudografos) $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ son *isomorfos*, si existen dos correspondencias biunívocas φ: $V \leftrightarrow U$ y ψ: $X \leftrightarrow Y$ tales que para cualquier arista $x = (u, v)$ de X es justo $\psi(x) = (\varphi(u), \varphi(v)$. En el caso de los grafos se puede dar la definición siguiente: los *grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ son *isomorfos* si existe una tal transformación biunívoca φ: $V \leftrightarrow U$ tal que $(u, v) \in X$ si, y sólo si, $(\varphi(u), \varphi(v)) \in Y$. Tal aplicación de φ se llama *isomorfa*. *Automorfismo* se llama a una aplicación isomorfa del grafo en sí mismo. Bajo el término de *operación de extracción de un vértice* del grafo G comprenderemos una operación que consiste en la extracción de cierto vértice junto con las aristas que le son incidentes. La *operación de extracción de una arista* del grafo $G = (V, X)$ consiste en la extracción del par correspondiente de X. Al hacer esto, si no se expresa lo contrario, todos los vértices se conservan. El *complemento* $\overline{G}$ *del grafo* G es un grafo en el cual dos vértices son contiguos si, y sólo si, ellos no son adyacentes en G. La *operación de subdivisión de la arista* (u, v) en el grafo $G = (V, X)$ consiste en la extracción de la arista (u, v) de X, en la adición de un nuevo vértice w a V y en la adición de dos aristas (u, w) y (w, v) a $X \setminus \{(u, v)\}$. El grafo G se llama *subdivisión del grafo* H si G puede

ser obtenido de H mediante la aplicación sucesiva de la operación de subdivisión de las aristas. Los grafos G y H son *homeomorfos* si existen tales subdivisiones suyas que son isomorfas. Sean $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ dos grafos. Por $G \oplus H$ designaremos un grafo, llamado *diferencia simétrica de los grafos* G y H con el conjunto de vértices $W = V \cup U$ y el conjunto de aristas $Z = X \oplus Y$ formado de aquellas, y solamente de aquellas, aristas que entran exactamente en uno de los conjuntos X o Y. Por $G \times H$ designaremos la *multiplicación cartesiana de los grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$, o sea, un grafo cuyos vértices son pares de la forma (v, u) $(v \in V, u \in U)$ y en el cual los vértices $(v_1 u_1)$ y (v_2, u_2) son adyacentes si, y sólo si, es adyacente aunque sea uno de los pares v_1, v_2 (en el grafo G) o u_1, u_2 (en el grafo H). *Unión de los grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ se llama al grafo $E = (V \cup U, X \cup Y)$.

Arbol se llama a un grafo conexo sin ciclos. Un grafo sin ciclos se llama *bosque*. *Completo* se llama al grafo en el que cada dos vértices diferentes están unidos con una arista. Un grafo completo con n vértices se designa por K_n. Un grafo sin aristas se dice que es *vacío* (*completamente inconexo*). Un grafo de un vértice, sin aristas, se llama *trivial*. *Dicotiledónico* se llama a un grafo cuyo conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos (dos partes) V_1 y V_2 de tal manera que cada arista del grafo une vértices de partes distintas. Un grafo dicotiledónico con sus partes V_1 y V_2 y el conjunto de sus aristas X se designará por (V_1, V_2, X). Si cada vértice de V_1 está unido con una arista a cada vértice de V_2, entonces el grafo se llama *grafo dicotiledónico completo*. Un grafo dicotiledónico completo (V_1, V_2, X) tal que $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ se designa por K_{n_1, n_2}. Un grafo se llama *k-conexo* si al extraerle cualesquiera $k - 1$ vértices se obtiene un grafo conexo diferente del trivial. El vértice cuya extracción del grafo aumenta el número de componentes de conexión se llama *divisor* o *punto de convergencia*. Un grafo se llama *grafo regular de grado d*, si todos sus vértices tienen grado d. Un grafo regular de grado 1 se llama *combinación de pares*. Un grafo regular de grado 3 se llama *cúbico*. El subgrafo soporte regular de grado k de un grafo se llama su *k-factor*. Una *combinación de pares perfecta* se llama 1-factor. *Combinación de pares máxima* del grafo G se llama a la combinación de pares que contiene el número máximo de aristas. *Ciclo hamiltoniano* de un grafo se llama a un ciclo simple que contiene todos los vértices del grafo. *Cubo n-dimensional unitario* se llama al grafo B^n cuyos vértices son vectores booleanos de longitud n y las aristas son caras unidimensionales (véase el capítulo I, párrafo 1).

1.1. Mostrar que para un grafo arbitrario $G(V, X)$ es justa la igualdad $2|X| = \sum_{v \in V} d(v)$.

1.2. Sea $i_k(G)$ el número de vértices de grado k en el grafo G. Hallar el número de grafos no isomorfos de par en par G, en los que:

1) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 2$, $i_k(G) = 0$, con $k \neq 2, 3, 4$;
2) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 3$, $i_k(G) = 0$, con $k \neq 2, 3, 4$.

1.3. Mostrar que en cualquier grafo que tenga no menos de dos vértices siempre habrán dos vértices con el mismo grado.

1.4. Demostrar que para cualquier colección de números enteros no negativos $(k_0, k_1, \ldots)$ tales que $\sum_i k_i = 2m$ existe un pseudografo con m aristas, que tiene para cada $i = 0, 1, \ldots$ exactamente k_i vértices del grado i.

1.5. Sea $d_0(G)$ el mínimo de los grados de los vértices del grafo G, que tiene n vértices.

1) Demostrar que si $d_0(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$, entonces el grafo es conexo.

2) ¿Se puede cambiar en la afirmación anterior $\frac{n-1}{2}$ por $\left[\frac{n-1}{2}\right]$?

1.6. Demostrar, que cualquier camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo simple. ¿Es válida una afirmación análoga para los caminos de longitud par?

1.7. Mostrar que un grafo conexo con n vértices contiene no menos de $n-1$ aristas.

1.8. Mostrar que en un grafo con n vértices y c componentes de conexión el número de aristas es no mayor de $\frac{1}{2}(n-c) \times (n-c+1)$.

1.9. Demostrar que cualquier grafo conexo no trivial contiene un vértice que no es divisorio.

1.10. Demostrar que en un grafo conexo, cualesquiera dos cadenas simples de longitud máxima tienen por lo menos un vértice común ¿Es justa la afirmación de que ellas siempre tienen una arista común?

1.11. Demostrar, que si de un grafo conexo se extrae una arista arbitraria contenida en algún ciclo simple, entonces el grafo seguirá siendo conexo.

1.12. Mostrar que si en un grafo con n vértices no hay ciclos de longitud impar y el número de aristas supera a $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, entonces el grafo es conexo.

1.13. Hallar el número $p_k(n)$ con el cual cualquier grafo de n vértices que tenga $p_k(n)$ ciclos de longitud k es conexo.

1.14. Supongamos que los grafos G y H son isomorfos. Mostrar que:

1) para cada $d \geqslant 0$ el número de vértices de grado d es igual en los grafos G y H;

2) para cada l el número de ciclos simples de longitud l en los grafos G y H es el mismo.

1.15. Mostrar que las condiciones 1), 2) del problema 1.14 son insuficientes para que los grafos G y H sean isomorfos.

1.16. Indicar los pares de grafos isomorfos y no isomorfos que hay entre los pares presentados en las figs. 3-6. Argumentar la contestación.

1.17. Supongamos que los grafos G y H son biconexos y cada uno de ellos tiene seis vértices y ocho aristas. El grafo G tiene exactamente dos vértices del grado 2 y el grafo H tiene exactamente cuatro

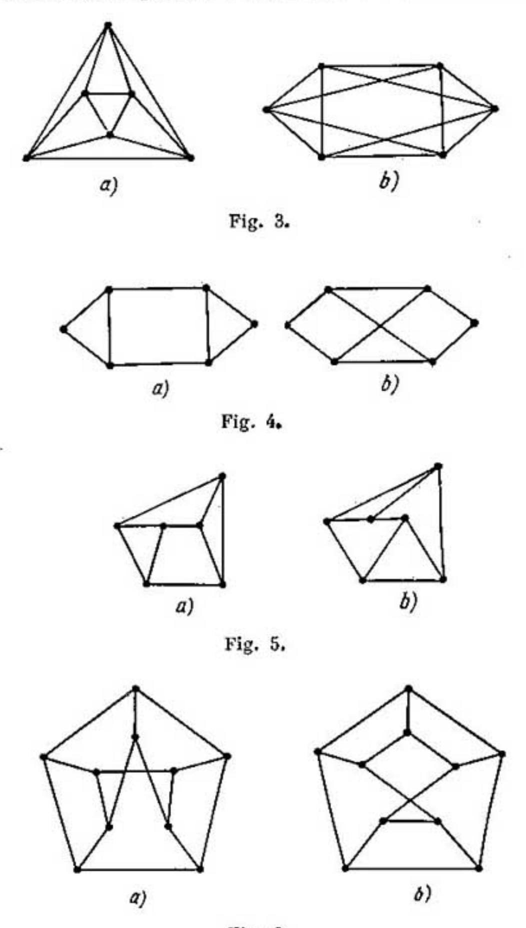


Fig. 3.

a) b)

Fig. 4.

a) b)

Fig. 5.

a) b)

Fig. 6.

vértices del grado 3. Se puede afirmar que los grafos G y H son:
1) isomorfos; 2) no isomorfos.

1.18. Los grafos G y H son biconexos y cada uno de ellos tiene seis vértices y diez aristas. Un vértice en cada uno de los grafos tiene grado $d\,(1 \leqslant d \leqslant 5)$ y los demás tienen grado d_1 $(d_1 < d)$. Mostrar que los grafos G y H son isomorfos.

1.19. Mostrar que en un grafo que no tiene automorfismos no triviales.

1) la distancia entre cualesquiera dos vértices de grado 1 es mayor de dos;

2) existe un vértice de grado 3 o mayor.

1.20. ¿Cuál es el número de automorfismos de un grafo que sea ciclo de longitud p?

1.21. Construir un grafo sin ciclos, que no tenga automorfismos no triviales y que contenga el número menor posible de aristas.

1.22. ¿Cuál es el menor número n $(n > 1)$ de vértices que puede haber en un grafo que no tenga automorfismos no triviales?

1.23. Supongamos que en un grafo biconexo que tiene seis vértices y diez aristas el grado de todos los vértices es igual y el número de ciclos simples de longitud 3 es igual a dos. Restablecer el grafo. Hallar el número de sus automorfismos.

1.24. Sea $O(v)$ el conjunto de todos los vértices adyacentes a v y $O'(v) = O(v \cup \{v\}$. Sea R_n el conjunto de todos los grafos G con n vértices, que tienen las propiedades siguientes: para cualesquiera dos vértices no contiguos u y v, o bien $O(v) \subseteq O(u)$, o bien $O(u) \subseteq O(v)$, y para cualesquiera vértices contiguos u y v o bien $O'(v) \subseteq O'(u)$, o bien $O'(u) \leqslant O'(v)$. Demostrar las afirmaciones siguientes:

1) En el grafo G de R_n los vértices de un mismo grado son todos o bien adyacentes de par en par, o bien no adyacentes de par en par.

2) En el grafo G de R_n existe aunque sea un vértice de grado $n - 1$.

3) Si para cierto d, los vértices de grado d son en el grafo G de R_n adyacentes de par en par, entonces los vértices de grado mayor que d también serán adyacentes de par en par.

4) El grafo G de R_n se determina unívocamente con una exactitud hasta el isomorfismo con la definición de los grados de los vértices.

5) La extracción de un vértice del grafo $G \in R_n$ lleva a un grafo de R_{n-1}

1.25. Supongamos que $n \geqslant 2$ y sea dada una familia $F(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ de grafos, en la cual el grafo H_i se ha obtenido del grafo G de n vértices mediante la extracción del vértice con el número i $(i = \overline{1, n})$. Observaremos que en los grafos H_i los vértices no están marcados. Demostrar que por la familia $F(G)$ se puede:

1) hallar el número de aristas del grafo G;

2) hallar para cada H_i el grado del vértice con la extracción del cual de G se obtiene el grafo H_i;

3) determinar para un grafo arbitrario L que tenga no más de $n - 1$ vértices, si éste es un subgrafo del grafo G;

4) determinar si el grafo G es conexo;

5) restablecer el grafo G si no es conexo.

1.26. Sea $D(G)$ el diámetro del grafo G y $\overline{G}$ el grafo cor
tario a G. Demostar que $D(\overline{G}) \leqslant 3$ si el grafo G no es co
$D(G) \geqslant 3$.

1.27. El grafo G se llama *autocomplementario* si los grafos
son isomorfos.

1) Hallar el grafo no trivial autocomplementario con el número de vértices.

2) Mostrar que un grafo autocomplementario es conexo.

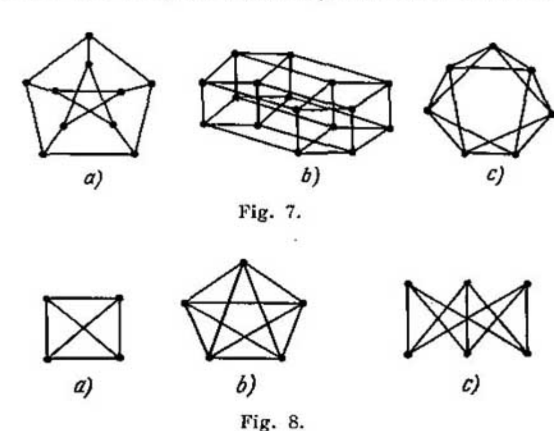


Fig. 7.

Fig. 8.

3) Mostrar que si G es un grafo autocomplementario, entonces $2 \leqslant D(G) \leqslant 3$.

1.28. ¿Cuántos grafos no isomorfos de par en par que tengan 20 vértices y 188 aristas existen?

1.29. Mostrar que si los grafos G y H son homeomorfos, entonces:

1) para cada $d \neq 2$ el número de vértices de grado d en ambos grafos es igual;

2) existe una aplicación biunívoca del conjunto de los ciclos simples del grafo G en el conjunto de los ciclos simples del grafo H, con la cual el número de vértices del grado d en los ciclos respectivos es igual para todos los $d \neq 2$.

1.30. Establecer si existen en los grafos representados en la fig. 7 subgrafos homeomorfos al grafo G.

1) $G = K_4$ (véase la fig. 8, *a*);
2) $G = K_5$ (véase la fig. 8, *b*);
3) $G = K_{3,3}$ (véase la fig. 8, *c*).

1.31. La *operación de sobredivisión* consiste en la sustitución de

dos aristas adyacentes (u, v) y (v, w), cuyo vértice común v tiene el grado 2, por una arista (u, w). Aplicando paso a paso la operación de sobredivisión se puede obtener de un grafo arbitrario G, que contenga vértices del grado 2, un pseudografo que no contenga vértices del grado 2. Este pseudografo se llamará sobredivisión completa del grafo G.

1) Mostrar que la sobredivisión completa del grafo G no depende del orden en el que se aplicó la operación de sobredivisión a los pares de aristas adyacentes del grafo G.

2) Mostrar que los grafos G y H son homeomorfos si, y sólo si, sus sobredivisiones completas son isomorfas (como los pseudografos).

1.32. Demostrar que en el grafo de Petersen (fig. 7, *a*) no hay ciclo hamiltoniano, pero en el grafo obtenido de él mediante la extracción de un vértice, hay un ciclo hamiltoniano.

1.33. Demostrar que en cada uno de los grafos K_n, $K_{n,n}$, B^n hay un ciclo hamiltoniano.

1.34. Sean n impar y B_k^n, el conjunto de vértices del cubo B^n, formado por vértices de peso k. Sea G un subgrafo del cubo B^n engendrado por el conjunto $B^n_{\frac{n-1}{2}} \cup B^n_{\frac{n+1}{2}}$.

1) ¿Existen en el grafo G combinaciones de pares perfectas?

2) ¿Existen en el grafo G ciclos de Hamilton?

1.35. En el grafo G hay un ciclo hamiltoniano y en el grafo H, una cadena hamiltoniana. ¿Es verdad que en el grafo $G \times H$ existe un ciclo hamiltoniano?

1.36. Demostrar que si para cualesquiera dos vértices u y v de un grafo conexo de n vértices se cumple $d(u) + d(v) \geqslant n$, entonces el grafo tiene un ciclo hamiltoniano.

1.37. Mostrar que cualquier grafo con n vértices y con no menos de $\binom{n-1}{2} + 2$ aristas, tiene ciclos hamiltonianos.

1.38. Mostrar que un grafo que tiene dos vértices no adyacentes de tercer grado y los demás de un grado no mayor de 2, no posee un ciclo hamiltoniano.

1.39. 1) Mostrar que $D(G \times H) \leqslant D(G) + D(H)$.

2) Comprobar si $D(G \times H) \leqslant \text{máx}\,\{D(G), D(H)\}$.

1.40*. Demostrar que cada grafo conexo regular de grado $2d$ es presentable en forma de unión de 2-factores no intersecados.

1.41.*. Mostrar que el grafo K_{2n} es representable en forma de unión de algún 1-factor y $n-1$ ciclos hamiltonianos.

1.42. Mostrar que el grafo K_{2n+1} se puede representar en forma de unión de n ciclos hamiltonianos.

1.43. Mostrar que en el grafo K_n con vértices numerados, hay $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos hamiltonianos diferentes.

1.44. Mostrar que el número de diferentes combinaciones de pares perfectas del grafo K_{2n} con vértices numerados es igual a $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

§ 2. PLANICIDAD, CONEXION, CARACTERISTICAS NUMERALES DE LOS GRAFOS

Un grafo se llama *planar* si puede ser dibujado en un plano de tal manera, que los arcos de las curvas que representan las aristas se crucen sólo en los puntos que corresponden a los vértices del grafo; además, en cualquier punto de intersección convergen sólo los arcos cotejados a las aristas incidentes precisamente al vértice que corresponde a este punto. Tal figura geométrica es la expresión del grafo planar y se llama *grafo plano. Cara interior* de un grafo conexo plano se llama a la región finita del plano, acotada por un camino cerrado y no conteniente dentro de sí ningún vértice ni arista del grafo. El camino que acota la cara se llama *frontera de la cara.* La parte del plano, formada por puntos que no pertenecen ni al grafo, ni a una de sus caras interiores, se llama *cara exterior.* Para los grafos planos biconexos (multigrafos) que tienen n vértices, m aristas y r caras se cumple la *fórmula de Euler* $n - m + r = 2$. Son válidos los siguientes criterios de la planicidad.

TEOREMA (Pontriagin—Kuratovsky). *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene subgrafos homeomorfos a los grafos* K_5 y $K_{3,3}$ (fig. 8, *b*, *c*).

Grosor del grafo G se llama al número menor $t(G)$ de subgrafos planares suyos, cuya unión es igual a G. A cada pseudografo conexo, plano, no trivial G se le puede cotejar el *pseudografo dual* G^* de la siguiente manera. Dentro de cada cara del pseudografo G se escoge un vértice del grafo G^*. Si x es una arista del grafo G que está en la frontera de las caras g_1 y g_2, y v_1 y v_2 son vértices del pseudografo G^* cogidos en estas caras, entonces los vértices v_1 y v_2 se unen con una arista en G^*. Un pseudografo (grafo) plano isomorfo a su pseudografo dual se llama *autodual*. Los ciclos $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ del grafo G se llaman *linealmente dependientes* si para algunos $i_1, i_2, \ldots, i_s$ $(1 \leqslant i_1 < < i_2 < \ldots < i_s \leqslant k)$ se cumple la relación $Z_{i_1} \oplus Z_{i_2} \oplus \ldots \oplus \oplus Z_{i_s} = 0$, donde 0 es un grafo sin aristas, $Z \oplus Y$ es la diferencia simétrica de los grafos Z e Y. En el caso contrario los ciclos Z_1, $Z_2, \ldots, Z_k$ se llaman *linealmente independientes.* El número mayor de ciclos $\xi(G)$ en la totalidad de ciclos linealmente independientes del grafo G se llama *número ciclomático del grafo* G. La coloración de los vértices (las aristas) de un grafo se llama *regular* si los vértices (las aristas) contiguos están pintados de diferentes colores. El menor número $\chi(G)$ de colores para el cual existe una coloración regular de los vértices del grafo G se llama *número cromático del grafo* G. El menor número $\chi'(G)$ de colores para el cual existe una coloración regular de las aristas del grafo G se llama *número cromático de las aristas del grafo* G. El subconjunto U de los vértices (aristas) se llama *encubrimiento del conjunto de los vértices* (o de las aristas) del grafo G si cada vértice (cada arista) del grafo, o bien coincide con cierto elemento del conjunto U, o bien es adyacente a algún ele-

mento de U (respectivamente, es incidente a cierto elemento de U). El encubrimiento se llama *sin salida* si después de la eliminación de cualquier elemento, deja de ser encubrimiento. La potencia mínima del subconjunto U de los vértices del grafo G, tal que cualquier arista del grafo es incidente aunque sea a un vértice de U, de designa por $\alpha_0(G)$ y se llama *número del encubrimiento de los vértices*. La potencia mínima del subconjunto Y de las aristas del grafo G, tal que cada vértice del grafo es incidente aunque sea a una arista de Y, se designa por $\alpha_1(G)$ y se denomina *número del encubrimiento de las aristas del grafo G*. El conjunto de los vértices (aristas) del grafo G se llama *independiente* si dos elementos suyos cualesquiera son adyacentes. Por $\beta_0(G)$ (y respectivamente, por $\beta_1(G)$) se designa la potencia

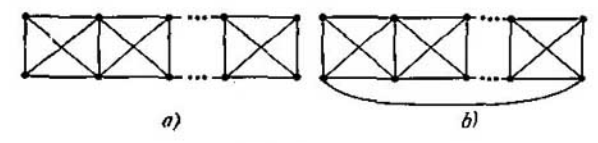


Fig. 9.

máxima del conjunto independiente de vértices (aristas) del grafo G. El número $\beta_0(G)$ (el número $\beta_1(G)$) se llama *número de independencias por los vértices* (*aristas*) *del grafo G*. Por $\alpha_{00}(G)$ se designa la potencia mínima del subconjunto de vértices U, tal que cada vértice del grafo G que no entra en U es adyacente aunque sea a un vértice de U.

2.1. ¿Son planares los grafos presentados en las fig. 6, *a*, *b*, 7, *a*, *b*, *c*?

2.2. ¿Con cuáles $n \geqslant 2$ los grafos presentados en la fig. 9, *a*, *b* son planares?

2.3. Sea $G_n = (V_1, V_2, X)$ un grafo dicotiledóneo,

$$V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$
$$V_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n\},$$

donde

$$x_i = (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, n};$$
$$y_i = (a_i, b_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = (a_n, b_1);$$
$$z_i = (a_i, b_{i+2}), \quad i = \overline{1, n-2},$$
$$z_{n-1} = (a_{n-1}, b_1), \quad z_n = (a_n, b_2).$$

Determinar con cuáles $n > 2$ el grafo G es planar.

2.4. 1) ¿Qué número mínimo de aristas hay que extraer del cubo B^4 para que el grafo obtenido sea planar?

2) ¿Qué número mínimo de vértices hay que extraer del cubo B^4 para que el grafo obtenido sea planar?

2.5*. Supongamos que G es un grafo biconexo plano que tiene no menos de dos caras interiores. Demostrar que existe tal cadena simple, perteneciente a la frontera de la cara exterior, cuya extracción lleva a un grafo biconexo plano con menor número de caras.

OBSERVACIÓN. Al extraer una cadena se eliminan todas sus aristas y vértices interiores, pero los vértices extremos de la cadena se quedan en el grafo.

2.6. Demostrar por inducción, empleando el resultado del problema 2.5, que en un grafo biconexo plano que tenga n vértices y m aristas, el número de las caras interiores es igual a $m - n + 1$.

2.7. Demostrar por inducción relacionada con el número de aristas, que el número ciclomático $\xi(G)$ de un pseudografo con n vértices, m aristas y c componentes de conexión es igual a $m - n + c$.

2.8. Hallar, para los grafos presentados en las figs. 5, *a*; 6, *a*; 7, *a* el número ciclomático $\xi(G)$ y seleccionar un sistema de $\xi(G)$ ciclos linealmente independientes.

2.9. Demostrar que en cualquier grafo planar existe un vértice de grado no mayor que 5.

2.10. Demostrar que en cualquier grafo planar que tenga no menos de cuatro vértices podrán encontrarse por lo menos cuatro vértices de grado no mayor que 5.

2.11. Demostrar que si en un grafo conexo planar con n vértices y m aristas cada ciclo simple contiene no menos de k aristas, entonces $m \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}$.

2.12. Un grafo conexo plano, cada cara del cual, incluyendo también la exterior, está acotada por un ciclo de longitud tres, se denomina *triangulación*.

Mostrar que cualquier triangulación con $n \geqslant 3$ vértices tiene $3n-6$ aristas y $2n - 4$ caras.

2.13. Sea $t(G)$ el grosor del grafo G. Mostrar que:

1) $t(K_n) \geqslant \left[\frac{n+7}{6}\right]$;

2) $t(K_{n,m}) \geqslant \left]\frac{n \cdot m}{2(n+m-2)}\right[$;

3) $t(B^n) \geqslant \left]\frac{n+1}{4}\right[$.

2.14*. Demostrar, empleando la fórmula de Euler, que los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planares.

2.15*. Demostrar que de un grafo biconexo, cuyo número ciclomático es ξ $(\xi > 1)$, mediante la extracción de una cadena se puede obtener un grafo biconexo con un número ciclomático igual a $\xi - 1$.

2.16. Construir un grafo dual al grafo representado en la fig. 5, *a*.

2.17. Mostrar que un pseudografo dual a un grafo conexo plano es conexo y plano.

2.18. Mostrar que el número ciclomático de un grafo dual coincide con el número ciclomático del grafo inicial.

2.19. Mostrar que si G tiene un vértice divisorio, entonces G^* también lo tiene.

2.20. Mostrar que el pseudografo G^*, dual al grafo triconexo plano G, no tiene bucles y aristas múltiples.

2.21. ¿Cuántos grafos biconexos, planos, autoduales, no isomorfos de par en par, con seis vértices, hay?

2.22. Mostrar que no existen grafos planares sexticonexos.

2.23. Mostrar que un grafo dual a una triangulación de n vértices ($n > 3$) es un grafo plano cúbico doblemente conexo.

2.24. 1) Mostrar que un grafo cúbico plano, cuyas caras no tienen menos de cinco vértices, contiene doce o más vértices.

2) Mostrar que si r_i es el número de caras de un grafo cúbico plano acotadas por i aristas, entonces $\sum_i (6 - i)\, r_i = 12$.

2.25. Hallar los números cromáticos de los grafos representados en las figs. 4—8.

2.26. Hallar los números cromáticos de aristas de los grafos presentados en las figs. 3—7.

2.27. Hallar el número cromático y el número cromático de aristas

1) del grafo K_n;

2) del grafo $K_{n,n}$;

3) del grafo B^n.

2.28. ¿Cuántas coloraciones regulares de los vértices del cubo B existen en el número mínimo de colores?

2.29. Mostrar que el número cromático de aristas del grafo de Petersen, representado en la fig. 7, *a*, es igual a cuatro, pero cualquiera de sus subgrafos G con ocho vértices tiene $\chi'(G) \leqslant 3$. ¿Es válida la desigualdad $\chi'(G) \leqslant 3$ para un subgrafo arbitrario propio del grafo de Petersen obtenido después de haber extraído un vértice?

2.30. Mostrar que para colorear las aristas de cualquier pseudografo cúbico son suficientes cuatro colores.

2.31. Mostrar que las aristas de un grafo cúbico plano se pueden colorear con dos colores a y b, de tal manera que cada vértice sea incidente a una arista de color a y a dos de color b.

2.32. Demostrar que a los vértices de cualquier grafo plano se les puede dar una coloración regular en seis colores.

2.33. Demostrar por inducción por el número de vértices, que para el grafo plano G es válida la desigualdad $\chi(G) \leqslant 5$.

2.34. Construir un grafo plano G con un número mínimo de vértices, tal que $\chi(G) = 4$.

2.35. Los vértices del grafo G están numerados en orden creciente de sus grados. Demostrar que si k es el número mayor, tal que $k \leqslant d(v_k) + 1$, entonces $\chi(G) \leqslant k$.

2.36. La operación de compresión consiste en la extracción de dos vértices adyacentes de un grafo, y en la añadidura de un nuevo vértice que será adyacente a aquellos que han quedado y con los que era adyacente aunque sea uno de los vértices extraídos. Mostrar que el

grafo obtenido al aplicar la operación de compresión a un grafo planar, también es planar.

2.37. Sea l la longitud de la cadena simple más larga en el grafo G. Mostrar que $\chi(G) \leqslant l + 1$.

2.38. Sea d el grado mayor de todos los vértices del grafo G. Mostrar que

1) $\chi(G) \leqslant d + 1$;

2) $\chi'(G) \leqslant d + 1$.

2.39. Sea p el número mayor para el que en el grafo G existe un subgrafo isomorfo al grafo K_p. Mostrar que $\chi(G) \geqslant p$.

2.40. Mostrar que para el grafo G con n vértices

1) $\beta_0(G) \cdot \chi(G) \leqslant n$;

2) $\chi(G) \cdot \overline{\chi}(G) \geqslant n$.

2.41. Determinar cuál es el menor n con el que existe un grafo no plano de n vértices con un complemento no plano.

2.42. Hallar el grosor del grafo K_8.

2.43. Demostrar que para un grafo conexo arbitrario G con n ($n > 1$) vértices

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = \alpha_1(G) + \beta_1(G) = n.$$

2.44. 1) Poner un ejemplo que refute la afirmación siguiente: cualquier encubrimiento de vértices contiene el encubrimiento de vértices mínimo.

2) Demostrar que cualquier encubrimiento de vértices contiene el encubrimiento de vértices sin salida.

2.45. Hallar el número de encubrimientos de aristas mínimos y finales:

1) de una cadena de longitud m;

2) de un ciclo de longitud n;

3) del grafo de Petersen (fig. 7, *a*).

2.46. Demostrar que para cualquier grafo G son válidas las desigualdades $\alpha_0(G) \geqslant \beta_1(G)$, $\alpha_1(G) \geqslant \beta_1(G)$.

2.47. Demostrar que para cualquier grafo G se cumple la desigualdad $\alpha_{00}(G) \leqslant \alpha_0(G)$.

2.48. Demostrar o refutar la desigualdad $\beta_0(G) \leqslant \alpha_{00}(G)$.

2.49. Supongamos que $U \subseteq V$ es cierto subconjunto de vértices del grafo $G = (V, X)$, y $\nu(U)$ es el número de aquellos vértices $v \in V \setminus U$ que no son adyacentes a ninguno de los vértices de U. Sea

$$\overline{\nu}_k(G) = \frac{1}{\binom{|V|}{k}} \sum_{U \subseteq V,\ |U| = k} \nu(U).$$

1) Mostrar que $\alpha_{00}(G) \leqslant k + \overline{\nu}_k(G)$.

2) Sea d_0 el menor de los grados de los vértices del grafo G. Mostrar que

$$\overline{\nu}_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V| - 1}\right).$$

3) Mostrar que para un grafo regular G de grado d que tenga n vértices,

$$\frac{n}{d} \leqslant \alpha_{00}(G) \leqslant 1 + \frac{n}{d}(1 + \ln d).$$

2.50. Mostrar que si d_0 es el mínimo de los grados de los vértices del grafo G, entonces $\alpha_0(G) \geqslant d_0$.

2.51.* Si G es un grafo dicotiledóneo y m, el número de sus aristas, entonces $m \leqslant \alpha_0(G) \cdot \beta_0(G)$. Mostrar que la igualdad se alcanza sólo para los grafos dicotiledóneos completos.

§ 3. GRAFOS ORIENTADOS

Un *pseudografo orientado* $D = D(V, X)$ se determina con la presentación de un conjunto no vacío (finito) V y una colección X de pares ordenados de elementos de V. Los elementos del conjunto V se llaman *vértices* y los elementos del conjunto X *arcos* (o *aristas orientadas*) del pseudografo orientado $D(V, X)$. En la colección X pueden haber también pares del tipo (v, v) que se denominan *bucles* (o lazos) y pares iguales que se llaman *arcos múltiples* (*o paralelos*). Los pares (u, v) y (v, u) se consideran iguales solamente en el caso en que $u = v$. *Multigrafo orientado* se llama a un pseudografo orientado que no contiene bucles. Si en un pseudografo orientado no hay ni bucles ni arcos múltiples, entonces éste se llama *grafo orientado* (o abreviadamente, *orgrafo*). *Grafo dirigido* se llama a un orgrafo tal que no tiene pares simétricos de aristas orientadas, o sea que el conjunto X no puede contener simultáneamente un arco (u, v) y el arco dirigido en sentido contrario (v, u).

Sea $x = (u, v)$ un arco de un pseudografo orientado. En éste el vértice u se llama *vértice inicial* (o *comienzo*) y v, *vértice final* (o *terminación*) del arco x; en este caso también se dice que el arco x *parte del* vértice u y *llega al* vértice v. Si el vértice v es comienzo o final del arco x, entonces se dice que v y x *son incidentes*. *Semigrado de comienzo del vértice* v (del pseudografo D) se llama al número de arcos del pseudografo D que parten del vértice v. El semigrado de comienzo del vértice v se designa por od (v) o $d^+(v)$. Analógicamente se llama *semigrado de llegada del vértice* v (designación: id (v) y $d^-(v)$) al número de arcos del pseudografo que se ponen en el vértice v.

Sustituyendo cada par ordenado (u, v) de la colección X del pseudografo orientado $D(V, X)$ por un par no orientado $\{u, v\}$, formado por los mismos elementos u y v, se obtiene el *pseudografo* $G = (V, X^0)$ *asociado* a $D(V, X)$.

Los pseudografos orientados $D_1(V_1, X_1)$ y $D_2(V_2, X_2)$ se llaman *isomorfos* si existen dos correspondencias biunívocas φ: $V_1 \leftrightarrow V_2$ y ψ: $(X_1 \leftrightarrow X_2)$, tales que para cualquier arco $x = (u, v) \in X_1$ es válida la relación $\psi(x) = (\varphi(u), \varphi(v))$. La *transformación isomorfa* de un pseudografo orientado *a sí mismo* se llama *automorfismo del pseudografo*. La totalidad de los automorfismos de un pseudografo

orientado forma un grupo con relación a la operación de multiplicación (de cumplimiento sucesivo) de automorfismos. Este grupo se llama *grupo* (*de automorfismos*) *de un pseudografo orientado*.

Las operaciones de extracción de vértices y arcos, así como los conceptos de subgrafo, subgrafo soporte y subgrafo engendrado se definen para los pseudografos orientados en forma semejante a como se hizo en los casos de pseudografos no orientados.

Al definir *los conceptos de camino orientado, camino cerrado, cadena, ciclo, cadena simple y ciclo simple* se exige (a diferencia de la definición de los respectivos «conceptos no orientados») que la sucesión (de vértices y arcos) $v_1, x_1, v_2, x_2, \ldots, x_{n-2}, v_{n-1}, x_{n-1}, v_n$ $(n \geqslant 2)$ satisfaga la condición: cada arco x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ tiene la forma (v_i, v_{i+1}), o sea, que el vértice v_i es el comienzo del arco x_i y el vértice v_{i+1} es su final. Se considera que el $(u - v)$-camino orientado está orientado desde su primer vértice u hasta su último vértice v. *Longitud del camino* se llama al número de arcos que éste tiene. *Distancia* $\rho(u, v)$ *de un vértice* u *a otro vértice* v se llama la longitud del $(u - v)$--camino más corto. A un camino orientado con frecuencia se lo denomina *vía* y a un ciclo simple orientado, *contorno*.

A una cadena soporte simple orientada se le llama *camino hamiltoniano* (*cadena hamiltoniana*). Se denomina *contorno hamiltoniano* al contorno soporte de un pseudografo orientado. Si un pseudografo orientado contiene un contorno hamiltoniano, entonces el propio pseudografo también se llama *hamiltoniano*.

Se dice que el vértice v de un pseudografo orientado *es accesible desde* el vértice u si en el pseudografo existe un $(u - v)$-camino, o sea un camino que parte del vértice u y llega al vértice v.

Un pseudografo orientado se llama *fuertemente conexo* (o *fuerte*) si en él cualquier vértice es accesible desde cualquier otro vértice suyo. Un pseudografo orientado se llama *conexo unilateral* (o *unilateral*) si para cualesquiera dos vértices por lo menos uno es accesible desde el otro. Un pseudografo orientado $D(V, X)$ se llama *débilmente conexo* (o *débil*) si el pseudografo (V, X^0) asociado a él es conexo. Si un pseudografo orientado ni siquiera es débilmente conexo, entonces se llama *inconexo*. Un *orgrafo trivial*, que consta solamente de un vértice, se considera (por definición) fuertemente conexo.

Componente fuerte del orgrafo D se llama a cualquiera de sus subgrafos orientados que sea orgrafo fuerte y que no se contenga en ningún otro subgrafo orientado fuertemente conexo del orgrafo D. Analógicamente, un *componente unilateral* representa en sí un subgrafo unilateral máximo del orgrafo D, y un *componente débil*, un subgrafo débil máximo. Los conceptos de componente fuerte, unilateral y débil se generalizan en forma natural para el caso de un pseudografo orientado.

Sea $\gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ el conjunto de todos los componentes fuertes del orgrafo D. *Condensación* D^* del orgrafo D se llama un tal orgrafo, cuyo conjunto de vértices es γ y el arco (S_i, S_j) estará en el orgrafo D^* si, y sólo si, en el orgrafo D existe aunque sea un

arco que sale de cierto vértice del componente S_i y llega a algún vértice del componente S_j.

Si $D = D(V, X)$ es un orgrafo, entonces el orgrafo inverso a él D' se da con el mismo conjunto de vértices V y con un conjunto de arcos X' tal que el arco (u, v) pertenece a X' si, y sólo si, el arco (v, u) pertenece a X.

El vértice v del orgrafo D se llama *fuente* si desde él es accesible cualquier otro vértice del orgrafo D. *Sumidero* del orgrafo D se llama todo vértice suyo v que sea fuente en el orgrafo inverso (al orgrafo D) D'.

Supongamos que D es un orgrafo para el cual el grafo asociado a él es un árbol. Entonces el orgrafo D se llama *árbol creciente*, si él tiene fuente. Un pseudografo orientado se denomina *completo* si en él cualesquiera dos vértices diferentes se unen aunque sea con un arco.

Torneo se llama a un grafo dirigido completo.

Sea D un orgrafo de n vértices y el conjunto de sus vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Matriz de adjunción* del orgrafo D se llama a la $(n \times n)$-matriz $A(D) = \| a_{ij} \|$ en la cual $a_{ij} = 1$ si el arco (v_i, v_j) pertenece al orgrafo D y $a_{ij} = 0$ en el caso contrario. Supongamos además que el conjunto de todos los arcos del orgrafo D también está ordenado: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. *Matriz de incidencia* (o *matriz incidental*) del orgrafo D se llama a la $(n \times m)$-matriz $B(D) = \| b_{ij} \|$ en la que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el vértice } v_i \text{ es final del arco } x_j, \\ -1 \text{ si el vértice } v_i \text{ es comienzo del arco } x_j, \\ 0 \text{ si el vértice } v_i \text{ no es incidente al arco } x_j. \end{cases}$$

3.1. Refutar la afirmación: si los semigrados de partida y de llegada de cualquier vértice de un orgrafo son positivos y pares, entonces para cada vértice del orgrafo habrá un contorno que le contenga.

3.2. Supongamos que el orgrafo $D(V, X)$ es por lo menos débilmente conexo, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 2$ y $d^+(v_1) - d^-(v_1) = 1$, $d^+(v_2) - d^-(v_2) = -1$, $d^+(v_j) = d^-(v_j)$, con $j = 3, \ldots, n$. Demostrar que entonces en el orgrafo D existe una $(v_1 - v_2)$-cadena orientada, que contiene todos los arcos del orgrafo.

3.3. Demostrar que un orgrafo es fuertemente conexo si, y sólo si, en él existe un camino cerrado soporte orientado.

3.4. Demostrar que un orgrafo débil es fuertemente conexo si, y sólo si, en él existe un camino cerrado orientado que contiene cada arco del orgrafo aunque sea una vez.

3.5. Supongamos que el orgrafo D se puede representar en forma de una unión de ciertos caminos cerrados orientados suyos $D_1, D_2, \ldots, D_k$ $(k \geqslant 1)$, que satisfacen la condición: cada dos caminos vecinos D_j y D_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ tienen aunque sea un vértice común. Demostrar que entonces el orgrafo D es fuertemente conexo.

3.6. Demostrar que en cualquier torneo hay un camino hamiltoniano.

3.7. Demostrar que el torneo T es orgrafo fuerte si, y sólo si, T tiene un contorno soporte (o sea que es un torneo hamiltoniano).

3.8. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de los vértices de un torneo. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} (d^+(v_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (n - d^+(v_i))^2$.

3.9. Supongamos que el vértice v del torneo T tiene un semigrado de salida no menor que el semigrado de salida de cada uno de los otros vértices del torneo. Demostrar que la distancia del vértice v a cualquier vértice del torneo no supera a 2.

3.10*. Designemos por S cierto conjunto de arcos del torneo T. Los arcos del conjunto S se llaman *concordados* si se pueden numerar los vértices del torneo T de tal forma que de la pertenencia del arco (v_i, v_j) al conjunto S se pueda deducir la desigualdad $i < j$. Supongamos que $f(n)$ es el mayor número entero tal, que cada torneo de n vértices $(n \geqslant 3)$ contiene un conjunto S formado por $f(n)$ arcos concordados. Demostrar que $f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

3.11*. Demostrar que el número de ciclos orientados de longitud 3 en un torneo de n vértices no es mayor que

$$t(n) = \begin{cases} \frac{n(n^2-1)}{24} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{n(n^2-4)}{24} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

3.12. Demostrar que el grupo de automorfismos de cualquier torneo tiene un orden impar (o sea que está formado de un número impar de elementos).

3.13. Mostrar que en la condensación D^* de un orgrafo arbitrario no hay contornos.

3.14. Demostrar que el orgrafo D es unilateral si, y sólo si, su condensación D^* tiene una única cadena soporte orientada.

3.15. El orgrafo $D(V, X)$ se llama *transitivo* si de la pertenencia de los arcos (u, v) y (v, w) al conjunto X se deduce la pertenencia al conjunto X del arco (u, w). Demostrar que la condensación de cualquier torneo es un torneo transitivo.

3.16. *Orgrafo sin contornos* se llama a un orgrafo que no contiene contornos. Demostrar que en un orgrafo sin contornos existe un vértice con un semigrado de salida nulo.

3.17. Demostrar que un orgrafo es isomorfo en su condensación si, y sólo si, él no tiene contornos.

3.18. Sea el orgrafo D débilmente conexo, pero no unilateral. Demostrar que en D no existe tal vértice que extrayéndoselo le convierte en un orgrafo fuerte.

3.19. Demostrar que un orgrafo débil es árbol creciente si, y sólo si, únicamente uno de sus vértices tiene un semigrado de llegada nulo y el semigrado de llegada de los demás vértices es igual a 1.

3.20. Sea S_n un grupo de sustituciones simétrico aplicado al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$. Examinemos la unión arbitraria T

de las transposiciones del grupo S_n. Al conjunto T se le puede cotejar el orgrafo $D(V, X_T)$ que tiene $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el arco (i, j) pertenece a X_T sólo en el caso en que $i < j$ y la transposición (ij) se contiene en el conjunto T. Demostrar que el conjunto T forma una base en S_n (o con otras palabras, el conjunto T es un *sistema irreducible* de generatrices del grupo S_n) si, y sólo si, el orgrafo $D(V, X_T)$ es un árbol creciente.

3.21. Demostrar que un orgrafo completo fuertemente conexo es hamiltoniano.

3.22. Mostrar que en orgrafo completo hay fuente.

3.23. Convencerse de que cualquier torneo transitivo tiene un solo camino hamiltoniano.

3.24. Demostrar que en cada torneo el número de todos los diferentes caminos hamiltonianos es impar.

3.25. Supongamos que un orgrafo completo fuertemente conexo tiene n vértices $(n \geqslant 3)$. Demostrar que con cualquier valor de k $(3 \leqslant k \leqslant n)$ para todo vértice del orgrafo habrá un contorno de longitud k que contiene este vértice.

3.26. Sea $D(V, X)$ un orgrafo completo fuertemente conexo que tiene $|V| \geqslant 4$. Mostrar que en el orgrafo D existen dos vértices diferentes v_1 y v_2 que satisfacen la condición: los orgrafos D_1 y D_2 que se obtienen del orgrafo D después de la extracción de los vértices v_1 y v_2 (respectivamente) son fuertemente conexos.

3.27. Por A^q se designa la matriz de la contigüidad de q-ésimo grado $A(D) = \| a_{ij} \|$ del orgrafo D. Demostrar que el (i, j)-ésimo elemento $a_{ij}^{(q)}$ de la matriz A^q es igual al número de todos los $(v_i - - v_j)$-caminos de longitud q (en el orgrafo D).

3.28. Sea B la matriz de incidencias del orgrafo $D(V, X)$. Mostrar que el subconjunto X_1 de arcos del orgrafo D $(X_1 \subseteq X)$ genera un ciclo simple (que puede no ser orientado) si, y sólo si, el conjunto de las columnas (de la matriz B) que corresponden a estos arcos es linealmente dependiente y cualquier subconjunto suyo propio no tiene esta propiedad.

3.29. Demostrar que un determinante de cualquier submatriz cuadrada de la matriz de incidencias $B(D)$ del orgrafo D es igual a 0, a $+1$, o bien a -1.

3.30. Sea B la matriz de las incidencias de un orgrafo débilmente conexo de n vértices D y sea la matriz $\overline{B}$ obtenida de B eliminando cualquier (una) fila. Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre diferentes[1]) árboles orientados del orgrafo D (considerados como subgrafos orientados del orgrafo D) y las submatrices no degeneradas del orden $n - 1$ de la matriz $\overline{B}$.

3.31. Supongamos que la matriz $\overline{B}$ es la submatriz de la matriz de las incidencias B del orgrafo débilmente conexo D que fue descrita en el problema anterior. Por $\overline{B}'$ se designa la matriz transpuesta

[1]) Aquí se considera que los dos árboles son *diferentes*, si son orientados *no isomorfos* con los vértices *marcados* (*numerados*).

a la matriz $\overline{B}$. Demostrar que el número de diferentes árboles orientados que hay en el orgrafo D es igual al valor del determinante de la matriz $\overline{B} \cdot \overline{B}'$.

§ 4. ARBOLES Y REDES BIPOLARES

El pseudografo $G = (V, X)$ en el que se han seleccionado k vértices, llamados *polos*, se denomina *red k-polar*. El pseudografo G se llamará *grafo* correspondiente a la *red k-polar*. La red Γ con el conjunto de polos P y el grafo $G(V, X)$ se designará por $(P; V, X)$. Dos redes k-polares son *isomorfas* si sus grafos son isomorfos y al

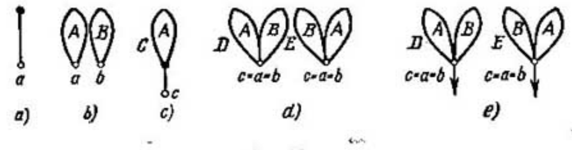


Fig. 10.

mismo tiempo los polos de una red mutua y unívocamente corresponden a los polos de la otra. Una red unipolar, cuyo grafo es un árbol, se llama *árbol radical*. El único polo de tal red se llama *raíz*. *Arbol radical plano* se llama a la representación del grafo en un plano. Este concepto se puede definir por inducción de la manera siguiente. La red representada en la fig. 10, *a*, es un árbol radical plano. Si A y B (véase la fig. 10, *b*) son árboles radicales planos, entonces las figuras C, D, E (fig. 10, *c*, *d*) también son árboles radicales planos. Consideraremos que un árbol radical plano arbitrario se representa en el plano con un corte, que es una semirecta que sale de la raíz (véase fig. 10, *e*). Aquí se puede suponer que las aristas incidentes a la raíz están numeradas en el sentido del giro de las agujas del reloj con los números $1, \ldots, m$, donde m es el grado de la raíz. Si se extrae de este árbol radical plano la arista de número i, entonces se obtendrá un grafo con dos componentes de conexión. A aquel de los componentes que no contiene raíz le llamaremos i-ésima *rama* del árbol radical inicial. La raíz de la i-ésima rama se considerará el vértice incidente a la i-ésima arista (en el árbol inicial). Designaremos por $d_0(A)$ el grado de la raíz de un árbol radical arbitrario A. Los árboles radicales planos A y B se llaman *iguales* si bien $d_0(A) = d_0(B) = 0$, o bien $d_0(A) = d_0(B) = m > 0$ y para cualquier $i = \overline{1, m}$ las i-ésimas ramas de los árboles A y B son iguales. Dos árboles que no son iguales se llaman *diferentes*. Así que los árboles D y E (véase la fig. 10, *d*) son diferentes si los árboles A y B (véase la fig. 10, *b*) son diferentes. A cada árbol radical plano T con m

aristas se le puede unívocamente cotejar un vector binario de longitud $2m$ llamado *código del árbol*. A un árbol con una arista se le coteja el vector 01. Si a los árboles A y B (fig. 10, b) se les cotejan los vectores $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ respectivamente, entonces al árbol C (fig. 10, c) se le coteja el vector $0\tilde{\alpha}1$ y a los árboles D y E (fig. 10, d), los vectores $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ y $\tilde{\beta}\tilde{\alpha}$.

A continuación, si no se menciona lo contrario, por red se entenderá una red de dos polos. La red $\Gamma(\{a, b\}; V, X)$ se designará abreviadamente por $\Gamma(a, b)$. *Subgrafo* de esta red se llamará a un subgrafo del grafo (V, X). A un vértice del subgrafo no trivial G de la red Γ se le llama de *frontera* si él, o bien es un polo, o bien es incidente a cierta arista de la red que no pertenece al subgrafo G. Un subgrafo no trivial de una red se llama *ramificación* (derivación) si posee el único vértice de frontera. *Subred* de una red de dos polos se llama a su subgrafo que tiene exactamente dos vértices de frontera. Estos vértices son los polos de la subred. Una red se llama *conexa* si su grafo es conexo. *Trivial* se llama a una red (o subred) conexa que tiene una arista. Una red conexa se llama *fuertemente conexa* si por cada arista pasa una cadena simple que une los polos de la red. Una red fuertemente conexa se llama *descomponible* si ella posee aunque sea una subred no trivial. En el caso contrario se denomina *indescomponible*. Supongamos que $\Gamma(a, b)$ es una red descomponible, $G(c, d)$ es su subred no trivial y $\Gamma_1(a, b)$ es la red obtenida de $\Gamma(a, b)$ mediante la sustitución de la subred $G(c, d)$ por la arista (c, d). Entonces a su vez la red $\Gamma(a, b)$ puede ser obtenida mediante la sustitución de la arista (c, d) de la red $\Gamma_1(a, b)$ por la red $G(c, d)$. De esta manera, la red descomponible $\Gamma(a, b)$ puede ser representada por medio de la red $\Gamma_1(a, b)$, la arista (c, d) de la red $\Gamma_1(a, b)$ y la red $G(a, b)$. Tal representación se llama *descomposición de la red* $\Gamma(a, b)$. La red $\Gamma_1(a, b)$ se llama red *exterior* y la red $G(c, d)$, *red interior de la descomposición*. La red $\Gamma(a, b)$ se llama *superposición de las redes* $\Gamma_1(a, b)$ y $G(c, d)$. Una red formada de m aristas paralelas que unen los polos a, b se designa por $\Gamma_m^p(a, b)$ o, abreviadamente, por Γ_m^p. Una red cuyo grafo es una cadena simple de longitud m y que une los polos a, b se designa por $\Gamma_m^s(a, b)$ o, abreviadamente por, Γ_m^s. La red que puede ser obtenida de las redes Γ_2^p y Γ_2^s mediante la aplicación de un número finito de operaciones de sustitución de una arista por una red, se llama red *paralelasecuencial* o abreviadamente π-red. Una red indescomponible y no trivial $\Gamma(a, b)$, diferente de $\Gamma_2^p(a, b)$ y de $\Gamma_2^s(a, b)$ se llama *H-red*.

Una red descomponible se llama *p-descomponible* (o respectivamente *s-descomponible*) si cierta red exterior de descomposición tiene la forma de Γ_m^p (o respectivamente de Γ_m^s), $m \geqslant 2$. Si cierta red exterior de descomposición de la red Γ es una H-red, entonces Γ se llama H-descomponible. Es válida la afirmación de que toda red descomponible es p-, s-, o bien H-descomponible. Una *p-descomposición*

en la que las redes interiores de descomposición son diferentes de las redes del tipo Γ_2^p que son p-descomponibles, se llama *p-descomposición canónica* de una red. De manera semejante se define la *s-descomposición canónica.* Una descomposición cuya red exterior es una H-red se llama *H-descomposición canónica.* A cada π-red Γ con $m \geqslant 1$ aristas se le puede cotejar un árbol radical plano $T(\Gamma)$ con m vértices colgantes, tal que: a) cada vértice del árbol $T(\Gamma)$, diferente de uno colgante, esté marcado con uno de los signos p o s; b) en cada red que va desde la raíz hasta un vértice colgante las marcas p y s

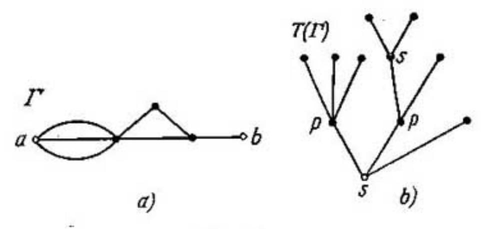


Fig. 11.

se alternan; c) los vértices diferentes de la raíz tienen un grado no igual a dos. Los vértices colgantes del árbol $T(\Gamma)$ no están marcados. El árbol $T(\Gamma)$ se define por inducción. Si Γ tiene el tipo Γ_m^p (o Γ_m^s), entonces $T(\Gamma)$ es un árbol cuya raíz está marcada con el símbolo p (respectivamente, con el símbolo s) y los demás m vértices son colgantes, adjuntos a la raíz y no tienen marcas. Si la red Γ es descomponible y diferente de las redes del tipo indicado, la red exterior de descomposición tiene la forma Γ_k^p (o Γ_k^s) y las redes interiores son $G_1, G_2, \ldots, G_k$, entonces el árbol $T(\Gamma)$ se construye de la manera siguiente. Supongamos que $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$ son los árboles que corresponden a las redes interiores de descomposición. Entonces en calidad de raíz $T(\Gamma)$ se toma el vértice de grado k marcado con el símbolo p (respectivamente con el símbolo s). Los vértices adjuntos a la raíz se marcan con el símbolo s (respectivamente con el símbolo p). Los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ adjuntos a la raíz se identifican con las raíces de los árboles $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$. Por ejemplo, la π-red representada en la fig. 11, *a* corresponde al árbol representado en la fig. 11, *b*. El árbol $T(\Gamma)$ se llama *diagrama de la descomposición canónica* de la π-red Γ. Observemos que si la red exterior de descomposición de la red Γ tiene la forma $\Gamma_k^s(a, b)$ y las aristas (a, u_1), (u_1, u_2), $\ldots$, (u_{k-1}, b) se sustituyen por las redes interiores $G_1(a, u_1)$, $G_2(u_1, u_2)$, $\ldots$, $G_k(u_{k-1}, b)$ respectivamente, entonces en el árbol $T(\Gamma)$ los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$, identificados con las raíces de los árboles radicales planos $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$ se suceden uno a otro de izquierda a derecha en el orden creciente de los números. Así que el árbol $T(\Gamma')$ repre-

sentado en la fig. 12, *b* es el diagrama de la descomposición canónica de la red Γ' (fig. 12, *a*), pero no es el diagrama de la red Γ (véase la fig. 11, *a*).

Un vértice de la red diferente de un polo se llama *interior*. El vértice v depende del vértice u si cualquier cadena simple que une los polos y pasa por v, también pasa por u. Los vértices v y u son *equivalentes* si v depende de u y u depende de v. El vértice v es *más débil* que el vértice u y el vértice u es *más fuerte* que el vértice v si v depende de u pero no es equivalente a él. El vértice v sa llama *mínimo* si no es más débil que ningún otro vértice interior de la red. En lo sucesivo se llamará *cadena de la red* a una cadena simple que une los polos de la red. En los casos en los que el término «cadena» se emplee en otro sentido eso se mencionará especialmente. A una cadena de la red se la llama la *más corta* si tiene la menor longitud posible.

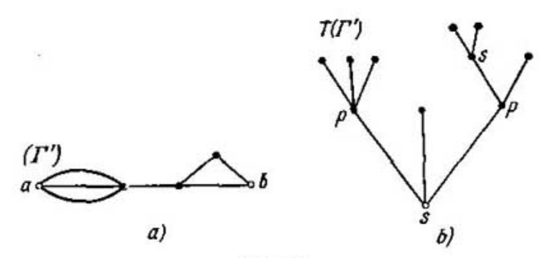


Fig. 12.

Longitud de la red se llama a la longitud de su cadena más corta. *Corte* se llama al conjunto de aristas cuya extracción destruye todas las cadenas. El corte se llama *sin salida* si no tiene ningún subconjunto que sea corte. El corte se llama *mínimo* si tiene el menor número posible de aristas. El número de aristas de un corte mínimo se llama *ancho* de la red.

4.1. Sea G un grafo con $n \geqslant 2$ vértices. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

1) G es un grafo conexo con $n - 1$ aristas.

2) G es un grafo conexo pero después de la extracción de cualquier arista se hace inconexo.

3) Cualquier par de vértices diferentes del grafo G está unido por una cadena única.

4) G es un grafo sin ciclos pero si se añade una arista que una a cualesquiera dos vértices eso lleva a la aparición de un ciclo.

4.2. Demostrar que en cualquier árbol con $n \geqslant 2$ vértices hay no menos de dos vértices colgantes.

4.3. Demostrar que si en un grafo no trivial G el número de vértices colgantes es igual al número de aristas, entonces, o bien G es inconexo, o bien es árbol.

4.4. Supongamos que $F(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ es una familia de grafos en la cual el grafo H_i ha sido obtenido del grafo de n vértices G mediante la extracción del vértice con el número i $(i=\overline{1, n})$. En los grafos H_i los vértices no están marcados. Demostrar que:

1) por la familia $F(G)$ se puede aclarar si es el grafo G un árbol;

2) si G es árbol, entonces por $F(G)$ se puede unívocamente (con una exactitud hasta el isomorfismo) reconstruir G.

4.5. Se llama *intersección* de dos *grafos* G y H al grafo $G \cap H$, todos los vértices y aristas del cual pertenecen tanto a G como a H. Mostrar que una intersección no vacía de dos subárboles de un árbol, es árbol.

Sea $\rho_G(v, u)$ la distancia entre los vértices v y u en el grafo $G = (V, X)$. El vértice u_0, para el cual

$$\max_{v \in V} \rho_G(u_0, v) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \rho_G(u, v),$$

se llama *centro del grafo* y el número $R(G) = \max\limits_{v \in V} \rho_G(u_0, v)$ se llama *radio del grafo*.

4.6. 1) Hallar el número de centros en el grafo

a) G (véase la fig. 6, a);

b) G (véase la fig. 6, b);

c) $G = K_{n_1, n_2}$.

2) Demostrar que en cualquier árbol hay no más de dos centros.

4.7. Demostrar que un árbol tiene un centro único en el caso de que su diámetro sea número par y tiene dos centros cuando el diámetro es número impar.

4.8. 1) Sean $D(G)$ el diámetro y $R(G)$ el radio del grafo G. Mostrar que $R(G) \leqslant D(G) \leqslant 2R(G)$.

2) Mostrar que si G es un árbol, entonces $R(G) = \left]\frac{D(G)}{2}\right[$.

3) Poner el ejemplo de un grafo G para el cual $R(G) = D(G)$.

4.9*. Demostrar que un árbol se reconstruye unívocamente con una exactitud hasta el isomorfismo, si se dan de par en par las distancias entre sus vértices colgantes.

4.10. Mostrar que en un árbol con un diámetro impar cualesquiera dos cadenas simples de longitud máxima tienen aunque sea una arista común.

4.11. *Arbol infinito* se llamará a un grafo con un conjunto numerable de vértices que satisface la condición siguiente: para cualesquiera dos vértices u, v del grafo existe una única $(u - v)$-cadena simple y la longitud de esta cadena es finita. Demostrar que si el grado de cada vértice de un árbol infinito es finito, entonces para todo vértice existe una cadena simple de longitud infinita que contiene a este vértice.

4.12. Sea $P = \{v_1, v_2, \ldots\}$ una cadena simple infinita. Sea $G = K_2 \times P$. ¿Cuál será la potencia del conjunto de todos los árboles soportes del grafo G?

Supongamos que $G = (V, X)$ es un multigrafo con un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $M(G) = \| a_{ij} \|$ es una matriz cuadrada de un orden n, en la que

$$a_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{con } i = j; \\ -1 & \text{con } i \neq j,\ (v_i, v_j) \in X; \\ 0 & \text{con } i \neq j,\ (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Se sabe [33] que el número de diferentes árboles soportes de par en par del grafo es igual al menor de cualquiera de los elementos de la diagonal principal de la matriz $M(G)$.

4.13. Hallar el número de árboles soportes de los grafos representados en las figs. 4, *a*, *b*; 8, *a*, *b*, habiendo numerado los vértices de estos grafos anticipadamente.

4.14. ¿Cuál es el número cromático de un árbol con $n \geqslant 2$ vértices?

4.15. ¿Es cierto que si el diámetro de un grafo G es igual a k ($k > 2$), entonces existe un árbol soporte cuyo diámetro es k?

4.16. Demostrar que siempre que $n \geqslant 3$ el número de árboles radicales isomorfos de par en par con n vértices, supera en no menos

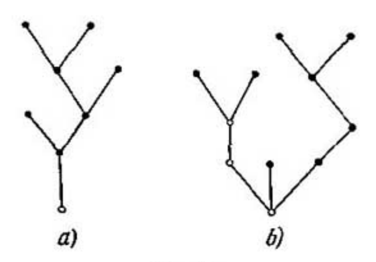


Fig. 13.

de dos veces al número de árboles no isomorfos de par en par con n vértices que no tienen raíz.

4.17. Supongamos que un árbol radical con n ($n \geqslant 2$) vértices colgantes no tiene vértices de grado 2 diferentes de la raíz. Mostrar que el número total de los vértices del árbol no es mayor que $2n - 1$.

4.18. Construir los códigos de los árboles radicales planos representados en la fig. 13, *a*, *b*.

4.19. Por el código $\tilde{\alpha}$ dado construir un árbol radical plano.

1) $\tilde{\alpha} = (001010011011)$;

2) $\tilde{\alpha} = (0100011001101011)$;

3) $\tilde{\alpha} = (0001010110011011)$.

4.20. 1) Aclarar cuantos árboles con cuatro aristas que sean radicales y no isomorfos de par en par existen.

2) ¿Cuántos árboles radicales planos con cuatro aristas diferentes de par en par existen?

4.21. Dividir el conjunto de vectores $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5\}$ en clases de equivalencia de tal manera, que los vectores de una clase sean códigos de los árboles isomorfos de par en par siguientes:

$$\tilde{\alpha}_1 = (0010101101), \quad \tilde{\alpha}_2 = (0100101101),$$
$$\tilde{\alpha}_3 = (0101001011); \quad \tilde{\alpha}_4 = (0100101011),$$
$$\tilde{\alpha}_5 = (0010110101).$$

4.22. Demostrar que el código $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$ de un árbol radical plano con n aristas tiene las siguientes propiedades:

1) $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = n$;

2) para cualquier $k\,(1 \leqslant k \leqslant 2n)$ es válida la desigualdad $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant k/2$.

4.23. Mostrar que cualquier vector binario $\tilde{\alpha}$ de longitud $2n$, que satisface las condiciones 1) y 2) del problema anterior, es el código de un grafo radical plano con n aristas.

4.24. 1) Mostrar que para el número $\psi(n)$ de los vectores $\tilde{\alpha} \in B^{2n}$ que satisfacen las condiciones 1), 2) del problema 4.22, es válida la relación recurrente

$$\psi(n) = \sum_{i=1}^{n} \psi(i-1)\,\psi(n-i), \text{ donde } \psi(0) = \psi(1) = 1.$$

2*) Hallar la expresión analítica de $\psi(n)$.

4.25. Supongamos que G es un grafo plano conexo. Partiendo de cierto vértice v, perteneciente a una cara exterior, recorreremos esta frontera de tal forma que ella constantemente se encuentre a la derecha según la dirección del recorrido. En cierto momento de nuevo llegaremos al vértice inicial v. El recorrido continuará si quedan aristas que no se han pasado, incidentes al vértice v y pertenecientes a la frontera de la cara exterior. En el caso contrario el recorrido se termina.

1) Demostrar que G es un árbol si, y sólo si, durante el recorrido cada arista se pasa dos veces.

2) Supongamos que G es un árbol con la raíz v. De acuerdo con el recorrido descrito anteriormente, al árbol se le puede cotejar un vector binario. Pasando sucesivamente una arista tras otra, al recorrer la arista de turno anotaremos 0 si pasamos por ésta la primera vez y 1 si pasamos la segunda vez. Mostrar que el vector obtenido de esta manera es el código del árbol G.

4.26. Supongamos que G es un grafo con n vértices y m aristas. El grafo se llama *compensado* si ningún subgrafo suyo tiene vértices de un grado mayor que $2m/n$.

1) Demostrar que un árbol con $n > 2$ es un grafo no compensado.

2) Poner el ejemplo de un grafo compensado en el que $m = n + 3$.

4.27. Sea G un grafo, a cada arista del cual se le ha inscrito un peso que es un número real no negativo. Se llama *peso del subgrafo* del grafo G a la suma de los pesos de las aristas de este subgrafo. Se llama *árbol recubriente mínimo del grafo* G al árbol soporte del mismo, que tenga un peso mínimo. Demostrar que se puede obtener un árbol recubriente mínimo empleando el algoritmo siguiente. En el primer paso del algoritmo se selecciona la arista de menor peso. Después en el paso sucesivo se selecciona la arista que tenga el peso menor entre todas las aristas que no formen ciclo con las aristas seleccionadas anteriormente. El algoritmo termina su funcionamiento si ya no existe una tal arista.

4.28. ¿Es justo que cualquier subred de una red fuertemente conexa es fuertemente conexa?

4.29. Supongamos que en una red conexa hay una única ramificación con k vértices que no se contiene en otra derivación con un número mayor de vértices. Mostrar que es suficiente trazar $k - 1$ aristas complementarias para hacer la red fuertemente conexa. ¿Se puede siempre hacer lo mismo con menor número de aristas complementarias?

4.30. ¿Es cierto que para cualesquiera n y m $(m \geqslant n \geqslant 3)$ existen redes descomponibles con n vértices y m aristas?

4.31. ¿Es cierto que un grafo fuertemente conexo es 2-conexo?

4.32. ¿Es cierto que si se seleccionan en un grafo cúbico 2-conexo arbitrario dos vértices no adyacentes en calidad de polos, entonces se obtendrá una red indescomponible?

4.33. ¿Cuántas redes indescomponibles no isomorfas de par en par se pueden obtener seleccionando en un cubo n-dimensional dos vértices en calidad de polos?

4.34. 1) Mostrar que si una red indescomponible tiene $n > 2$ vértices y m aristas, entonces

$$3n \leqslant 2m + 2 \leqslant n(n-1).$$

2) Mostrar que para cualesquiera m y n, tales que $m \geqslant \frac{3}{2}\, n - 1$, $n \geqslant 4$ existe una red indescomponible con n vértices y m aristas.

4.35. Para las redes representadas en la fig. 14, *a*, *b*. *c*,

1) determinar el tipo de descomposición;

2) hallar las redes exteriores de la descomposición canónica.

4.36. Sea Γ la red representada en la fig. 15.

1) Indicar todos los vértices minimales de la red.

2) Dividir todos los vértices interiores de la red en clases formadas de vértices equivalentes de par en par.

3) Comprobar si existe en esta red un vértice que sea más débil que todos los demás.

4.37. Demostrar que para cada vértice v de una red fuertemente conexa, existe una cadena que contiene todos los vértices más fuertes que él o equivalentes a él.

4.38. Supongamos que $S(\Gamma)$ es el conjunto de tales vértices v de la red Γ que no son mínimos.

1) ¿Es cierto que si Γ es una red H-descomponible sin aristas múltiples, entonces después de la unión de cada vértice $v \in S(\Gamma)$ por las aristas con cada uno de aquellos polos a los cuales v es no adyacente resultará una red indescomponible?

2) ¿Es suficiente para obtener una red indescomponible unir cada vértice v de $S(\Gamma)$ exactamente con uno de aquellos polos a los cuales v no es adjunta?

4.39. 1) Mostrar que todo vértice divisorio es mínimo.

2) Mostrar que todo vértice adjunto a ambos polos es mínimo.

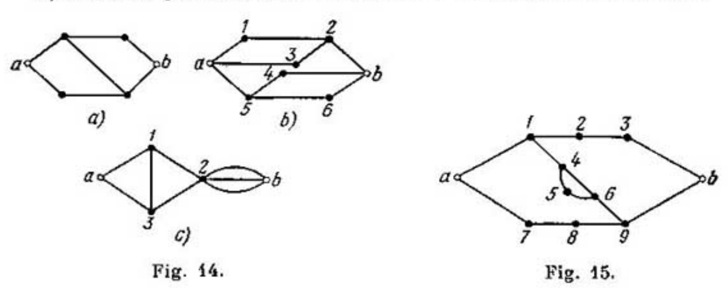


Fig. 14. Fig. 15.

4.40. Sean todos los vértices de la red fuertemente conexa Γ mínimos.

1) Aclarar si la red Γ puede ser:

a) p-descomponible;

b) s-descomponible;

c) H-descomponible.

2) Supongamos que la red Γ es s-descomponible. Mostrar que cada vértice interior es divisor.

3) Supongamos que la red Γ es H-descomponible. Comprobar si alguna de sus redes interiores puede ser:

a) H-red;

b) red H-descomponible;

c) red diferente de las redes Γ_m^p $(m \geqslant 1)$.

4.41. Supongamos que la red fuertemente conexa Γ que tiene 8 aristas no es ni p-, ni s-descomponible y no tiene subredes del tipo Γ_m^p, Γ_m^s $(m > 1)$. Mostrar que Γ es una red indescomponible.

4.42. Sea $G = (V_1, V_2, X)$ un grafo conexo bipolar en el que el grado de cada vértice es mayor o igual a 2. Mostrar que si se construye una red $\Gamma(a, b)$, uniendo con arista el polo a con cada vértice del conjunto V_1, y el polo b, con cada vértice del conjunto V_2, entonces esta red resultará una H-red.

4.43. ¿Existe una red p-descomponible en la que cualquier subred que tenga no menos de tres aristas es p-descomponible?

4.44. Construir los diagramas de la descomposición canónica para cada una de las redes representadas en la fig. 16, *a*, *b*.

4.45. Construir π-redes que tengan los diagramas de la descomposición canónica como los representados en la fig. 17, *a*, *b*.

4.46. Demostrar que si las π-redes Γ_1 y Γ_2 no son isomorfas, entonces tienen diferentes diagramas de descomposición canónica.

4.47. Supongamos que A y B son dos cadenas de la red $\Gamma(a, b)$, que el vértice u pertenece a la cadena A pero no pertenece a la cadena B y que el vértice v pertenece a la cadena B pero no pertenece a la A. Supongamos además que $[u, v]$ es una cadena simple que une u y v,

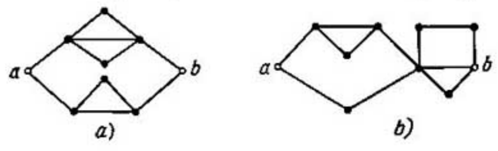


Fig. 16.

y no se cruza con las cadenas A y B en ningún sitio excepto en sus extremos.

1) Demostrar que existen por lo menos dos cadenas de la red Γ cuyos vértices pertenecen a la unión de las cadenas A, B y $[u, v]$,

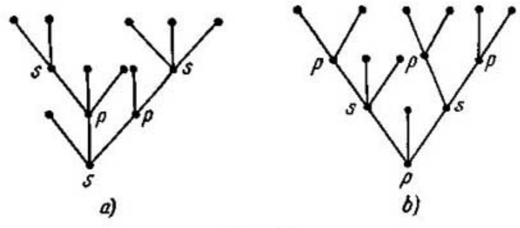


Fig. 17.

y que contienen la cadena $[u, v]$. ¿Es qué existen siempre aunque sea tres cadenas así?

2) Mostrar que si las cadenas A y B tienen vértices interiores comunes pero no tienen aristas comunes, entonces existen no menos de cuatro cadenas de la red que se contienen en la unión de las cadenas A, B y $[u, v]$, que satisfacen las condiciones del punto 1).

4.48. Demostrar la equivalencia de las dos definiciones siguientes de π-red:

1) La red $\Gamma(a, b)$ se llama π-red si se pueden orientar sus aristas de tal manera que en cada cadena simple que une los polos a y b, todas las aristas estén dirigidas de a hacia b.

2) π-redes se llaman aquéllas y solamente aquéllas redes que se obtienen con el siguiente proceso inductivo:

a) Las redes Γ_2^p y Γ_2^s (fig. 18, *a*) son π-redes.

b) Si las redes A y B (fig. 18, *b*) son π-redes, entonces las redes representadas en la fig. 18, *c* son π-redes.

4.49. Mostrar que entre todas las π-redes con m ($m > 4$) aristas, el mayor número de cadenas más cortas tienen redes s-descomponibles.

4.50. 1) Indicar el tipo de π-redes que tienen el número máximo de cadenas simples que unen los polos.

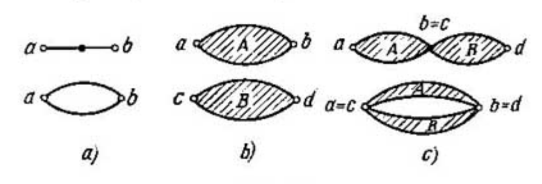


Fig. 18.

2) Indicar el tipo de π-redes que tienen el mayor número de cortes sin salida.

4.51. Sea $\varphi(m)$ el mayor número de cadenas de una π-red con m aristas. Mostrar que:

1) $\varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(3n) = 3^n$ $(n \geqslant 1)$;
3) $\varphi(3n+1) = 4 \cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$;
4) $\varphi(3n+2) = 2 \cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$.

4.52. ¿Es cierto que entre todas las redes con m aristas son las π-redes las que tienen el mayor número de cadenas simples?

4.53. Para cada $n \geqslant 5$ indicar la H-red con n vértices que tiene el número máximo de cadenas que unen los polos. Contar para cada k $(1 \leqslant k < n)$ el número de cadenas de longitud k entre los polos.

4.54. Mostrar que para una red con m aristas que tiene una longitud l y una anchura t es válida la desigualdad $m \geqslant l \cdot t$.

4.55. Demostrar que en una π-red la intersección de cualquier cadena simple entre los polos y cualquier sección sin salida contiene exactamente una arista.

4.56*. El conjunto de las cadenas de la red Γ se llama *determinante* para el vértice v si la intersección de los conjuntos de los vértices interiores de estas cadenas es $\{v\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación: para que una red sin aristas múltiples, que no es p-descomponible sea indescomponible, es necesario y suficiente que para cualquier vértice interior exista un conjunto determinante de cadenas.

4.57. Demostrar la afirmación siguiente. Para que a una red descomponible Γ, mediante la añadidura de aristas, se la pueda

hacer descomponible, es necesario y suficiente que Γ no tenga aristas múltiples y tenga por lo menos cuatro vértices.

4.58. Construir una red descomponible con el menor número de aristas y el número n ($n \geqslant 4$) de vértices, que no se pueda hacer descomponible mediante una sustitución sucesiva de subredes del tipo Γ_2^s y Γ_2^p por aristas.

§ 5. EVALUACIONES EN LA TEORIA DE LOS GRAFOS Y REDES

Se llama *marcado* (o *numerado*) un grafo (orgrafo, pseudografo, etc.) a cuyos vértices les han inscrito marcas (números). Por $\mathcal{G}_n$ designaremos la totalidad de los grafos de n vértices (abreviadamente n-grafos) en cada uno de los cuales los vértices están numerados con $1, 2, \ldots, n$. Por $\mathcal{G}_{n,m}$ designaremos el subconjunto de todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ cada uno de los cuales tiene exactamente m aristas. Un grafo con n vértices y m aristas se llamará abreviadamente *(n, m)-grafo*. Los grafos G y H de $\mathcal{G}_n$ se consideran *diferentes* si existen dos vértices j y k adyacentes en uno de los grafos pero no en el otro.

Supongamos que $\varphi_n(P)$ es la designación del número de todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ que poseen la propiedad P. Se dice que *casi todos los n-grafos poseen la propiedad P* si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(P)}{|\mathcal{G}_n|} = 1$. Sea $m = m(n)$ una función en números enteros no negativa y $\varphi_{n,m}(P)$ el número de todos los grafos de $\mathcal{G}_{n,m}$ que poseen la propiedad P. Se dice que *casi todos los $(n, m(n))$-grafos poseen la propiedad P* si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n,m}(P)}{|\mathcal{G}_{n,m}|} = 1$.

El *grupo de automorfismos* del grafo G (o abreviadamente *grupo del grafo G*) representa en sí el conjunto de todos los automorfismos del grafo G con la operación corriente de multiplicación (de cumplimiento consecutivo) de los automorfismos. El grupo del grafo G se designa por $\Gamma(G)$. Analógicamente se define el grupo del pseudografo (del orgrafo, etc.). El grupo del grafo de n vértices generalmente se identifica con el subgrupo del grupo simétrico S_n isomorfo a él.

Si π es una sustitución determinada sobre un conjunto de n elementos, entonces se la puede descomponer en el producto de los ciclos no intersecados. Supongamos que por $j_k(\pi)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ se designa el número de ciclos de longitud k en la sustitución π al descomponerse en ciclos que no se intersecan. La colección $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, donde $j_k = j_k(\pi)$ se llama *vector de la estructura cíclica de la sustitución* π. Si A es cierto grupo de sustituciones de n-ésimo grado, entonces la expresión

$$Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n) = |A|^{-1} \sum_{\pi\in A} \prod_{k=1}^{n} t_k^{j_k(\pi)}$$

se llama *índice cíclico* del grupo A y abreviadamente se designa por $Z(A)$. Aquí $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son las así llamadas *variables formales.*

Sea A un grupo de sustituciones aplicado al conjunto M. Los elementos b_1 y b_2 de M se llaman *A-equivalentes* si existe una sustitución $\pi \in A$ que transforma uno de estos elementos en otro, o sea $\pi(b_1) = b_2$ o $\pi(b_2) = b_1$. El conjunto M se divide con la relación de A-equivalencia en clases que no se intersecan y se llaman *órbitas.* Es válida la afirmación siguiente.

LEMA (Burnside). *El número de órbitas $N(A)$ en el conjunto M, determinadas por el grupo A, se da con la igualdad*

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\pi \in A} j_1(\pi).$$

Supongamos que sobre el conjunto M_1 se aplica el grupo de sustituciones A y sobre el conjunto M_2, el grupo de sustituciones B. El grupo exponencial B^A está formado por elementos de todos los géneros del tipo $(\pi; \sigma)$; donde $\pi \in A$, $\sigma \in B$; y actúa este grupo sobre el conjunto $M_2^{M_1}$ (de todas las funciones que aplican M_1 en M_2) de acuerdo a la regla siguiente: $(\pi; \sigma) f(x) = \sigma(f(\pi(x)))$ para cualquier función $f(x)$ de $M_2^{M_1}$. Supondremos que el conjunto M_1 es finito, el conjunto M_2 no más que numerable y $|M_k| \geqslant 2$ $(k = 1, 2)$. Sea w: $M_2 \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ una función de ponderación dada en el conjunto M_2 y que satisface la condición: con cualquier $i = 0, 1, 2, \ldots$ la potencia c_i del subconjunto de todos los elementos de M_2, que tienen un peso i, es finita[1]. La función generatriz $c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ se llama *serie enumeradora para las figuras. El peso de la función f* del conjunto $M_2^{M_1}$ se determina con ayuda de la igualdad $w(f) = \sum_{b \in M_2} w(f(b))$. Si el grupo B es igual al grupo unitario E, que actúa sobre el conjunto M_2, entonces el peso $w(F)$ de la *órbita* F en el conjunto $M_2^{M_1}$ determinado por el grupo E^A es igual al peso de cualquier función f de la órbita F. El número C_i de las órbitas de peso[2] i en el conjunto $M_2^{M_1}$ es finito con cualquier $i \geqslant 0$. La función generadora $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ se llama *serie enumeradora para las funciones* (o *serie enumeradora para las configuraciones*). Es válida la siguiente afirmación.

TEOREMA (Polya).

$$C(x) = Z(A;\ c(x),\ c(x^2), \ldots, c(x^n)),$$

---

[1]) Con frecuencia se dice que c_i es el número de «*figuras de peso i*» (en el conjunto M_2).

[2]) A veces a C_i se le denomina número de «*configuraciones de peso i*» en el conjunto $M_2^{M_1}$.

donde n es el número de elementos en el conjunto M_1 (el grado del grupo A) y $c(x^k)$ se sustituye en el índice cíclico $Z(A;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ sólo en los lugares de todas las entradas de las variables t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.1. Mostrar que

$$1)\ |\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}};\quad 2)\ |\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

5.2. 1) Hallar el número de diferentes torneos con n vértices, enumerados con $1, 2, \ldots, n$.

2) Hallar el número de pseudografos orientados con n vértices numerados y m arcos.

5.3. 1) Mostrar que el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que tienen dados k vértices que son aislados, es igual a $2^{\binom{n-k}{2}}$.

2) Mostrar que el número de grafos sin vértices aislados en $\mathcal{G}_n$ es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

3) Mostrar que casi todos los n-grafos no tienen vértices aislados.

5.4. Supongamos que el subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_n$ está formado de N grafos diferentes de par en par. Mostrar que en $\mathcal{G}$ el número de grafos no isomorfos de par en par es no menor que $N/n!$

5.5. Sea $\psi(m)$ el número de grafos conexos no isomorfos de par en par con m aristas. Mostrar que

$$1)\ \psi(m) \leqslant \sum_{\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1+8m}) \leqslant n \leqslant m+1} \binom{\binom{n}{2}}{m};$$

$$2)\ \psi(m) \leqslant e\left(\frac{em}{2}\right)^m \text{ con } m \to \infty.$$

5.6. Mostrar que el número de pseudografos no isomorfos de par en par, que no tienen vértices aislados y que tienen m aristas, no supera a $(cm)^m$, donde c es una constante que no depende de m y k.

5.7. Mostrar que el número de redes de k polos, no isomorfas de par en par, con m aristas, sin bucles y sin vértices aislados, no supera a $(2m)^k\,(cm)^{2m}$, donde c es una constante que no depende de m y de k.

5.8. Demostrar que el número de árboles con m aristas, no isomorfos de par en par, no sobrepasa al número de árboles radicales, planos, diferentes de par en par con m aristas.

5.9. 1) Mostrar que el número de árboles radicales, planos, con m aristas, diferentes de par en par, no sobrepasa $\binom{2m}{m}$.

2) Hallar la conducta asintótica del número $q(m)$ de árboles radicales planos con m aristas si $m \to \infty$.

5.10. Con ayuda del teorema de Cayley, el cual afirma que el número de árboles diferentes de par en par con n vértices numerados es igual a n^{n-2}, mostrar que el número de árboles no isomorfos de par en par con n vértices es no menor que $c_n n^{-1,5} e^n$, donde $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2\pi}$.

5.11. Mostrar que el número de árboles diferentes de par en par con n vértices numerados y en los que el vértice con el número 1 tiene el grado k, es igual a $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

5.12. Hallar el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que sean bosques.

5.13*. Mostrar que el número de los bosques en $\mathcal{G}_n$, en los que los vértices j y k dados, que pertenecen a distintos componentes de conexión, es igual a $2n^{n-3}$.

5.14. Sea $\varphi(n)$ el número de los árboles radicales distintos de par en par con n vértices colgantes, tales que el grado de la raíz es igual a dos, y el grado de cada vértice igual a tres.

1) Mostrar, que el número $\varphi(n)$ es igual al número de maneras en que se pueden colocar paréntesis en la expresión $b_1 : b_2 : \ldots : b_n$, para que la expresión obtenida nuevamente, tenga sentido.

2) Mostrar que $\varphi(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

5.15. 1) Mostrar que el número de las π-redes bipolares no isomorfas de par en par, con m aristas, no supera el doble del número de los árboles radicales planos distintos de par en par, con m vértices colgantes.

2) Mostrar, que el número de π-redes no isomorfas de par en par con m aristas no supera $2\binom{4m-2}{2m}$.

5.16. Hallar el número de redes no isomorfas de par en par $\Gamma(a, b)$ con n vértices y m aristas, que tienen las siguientes propiedades:

1) la red $\Gamma(a, b)$ es s-descomponible;

2) todos los vértices de la red $\Gamma(a, b)$ son mínimos.

Observación. Los polos a y b de la red $\Gamma(a, b)$ se consideran no equivalentes; el primero de ellos es entrada y el segundo, salida de la red. En la aplicación isomorfa de la red Γ en la red G, la entrada (salida) de la red Γ debe corresponder a la entrada (salida) de la red G.

5.17. Sea $\Phi(n, m)$ el número de las diferentes fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\&, \vee\}$ y el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con m entradas de los símbolos de los enlaces.

1) Mostrar que $\Phi(n, m)$ es igual al número de árboles radicales diferentes de par en par, que tienen cada vértice colgante marcado con cierto símbolo del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y cada vértice diferente del colgante, marcado con uno de los símbolos $\&$, $\vee$.

2) Mostrar que $\Phi(n, m) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} 2^m n^{m+1}$.

OBSERVACION. Las fórmulas se consideran diferentes si ellas representan en sí distintas palabras en el alfabeto $\{\&, \vee, (,), x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

5.18. Sea $\Phi(n, m, k)$ el número de diferentes fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\&, \vee, -\}$ y el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con m entradas de los símbolos de las variables y k entradas del símbolo $^-$. Mostrar que

$$\Phi(n, m, k) \leqslant \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1} 8^{m-1} n^m.$$

5.19. Mostrar que el número de grafos inconexos en $\mathcal{G}_{n,m}$ no supera a

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \binom{\binom{n}{2} - k(n-k)}{m}.$$

5.20. Mostrar que el número de grafos en $\mathcal{G}_{n,m}$ que tienen exactamente dos componentes de conexión no supera a

$$4^{n-2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \sum_{j=k-1}^{\binom{k}{2}} \binom{\binom{k-1}{2}}{j-k+1} \binom{\binom{n-k-1}{2}}{m-j-n+k+1}.$$

5.21. Mostrar que el número de grafos k-conexos en $\mathcal{G}_{n,m}$ que no son $(k+1)$-conexos $(k \leqslant n-2)$, no supera a

$$\binom{n}{k} \sum_{j=\binom{k+1}{2}}^{m} \binom{\binom{k}{2} + k(n-k)}{j} \sum_{r=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-k}{r} \binom{\binom{n-k}{2} - r(n-k-r)}{m-j}.$$

INDICACION. Con $k \leqslant n-2$ en un grafo que no sea $(k+1)$--conexo existen k vértices, cuyas extracciones llevan a un grafo inconexo.

5.22. Mostrar que el número de subgrafos conexos del cubo B^n diferentes de par en par, generados por subconjuntos de k vértices, no supera a $2^n(4n)^{k-1}$. (Considerar que los vértices del cubo B^n están numerados con números desde el 1 hasta el 2^n).

5.23. Mostrar que casi todos los n-grafos tienen el radio mayor que la unidad, evaluando desde arriba el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que tienen un vértice de grado $n-1$.

Sea $p(G)$ cierto parámetro numérico del grafo G. Sea $\bar{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p(G)$ el valor medio del parámetro p y $Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \bar{p}(n))^2$, la dispersión del parámetro p. Análogicamente se puede determinar el valor medio y la dispersión de los parámetros de los grafos de $\mathcal{G}_{n,m}$. Sea $\theta > 0$, $\delta_n(\theta)$ la parte

de aquellos grafos G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales $p(G) \geqslant \theta$, y $\Delta_n(\theta)$, la parte de los grafos G de $\mathcal{G}_n$ tales que $|p(G) - \overline{p}(n)| \geqslant \theta$. Para variadas evaluaciones y demostraciones de las propiedades de casi todos los grafos se emplea con frecuencia la desigualdad siguiente (Chébishev):

$$\delta_n(\theta) \leqslant \frac{\overline{p}(n)}{\theta}, \tag{1}$$

$$\Delta_n(\theta) \leqslant \frac{Dp(n)}{\theta^2}. \tag{2}$$

Sea, por ejemplo, $p(G)$ el número de vértices aislados del grafo G. Hay que demostrar que para casi todos los n-grafos $p(G) = 0$. Sea $g_n(i)$ el número de grafos de $\mathcal{G}_n$ en los cuales el vértice con el número i es aislado. Entonces,

$$\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} g_n(i).$$

Es evidente que $g_n(i) = 2^{\binom{n-1}{2}}$ para todos los $i = \overline{1, n}$. De aquí que $\overline{p}(n) = n \cdot 2^{-n}$. Suponiendo que en (1) $\theta = 1/2$, obtendremos que la parte de los grafos G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales $p(G) \geqslant 1/2$ no supera a $n 2^{-n+1}$. Pero el $\lim_{n\to\infty} n \cdot 2^{-n+1} = 0$. En consecuencia, para casi todos los n-grafos $p(G) < 1/2$, o sea que $p(G) = 0$.

Supongamos ahora que $p(G)$ es el número de aristas en el grafo G. Mostremos que en casi todos los n-grafos $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1 + \varepsilon_n)$, donde el $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Tenemos $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{(i, j)} g_n(i, j)$, donde $g_n(i, j) = 2^{\binom{n}{2} - 1}$ es el número de grafos en los que el par de vértices (i, j) está unido con una arista. Así que $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Calculemos la dispersión:

$$Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \overline{p}(n))^2 = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p^2(G) - (\overline{p}(n))^2.$$

Numeremos todos los pares del tipo (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ con números desde el 1 hasta el $\left(\frac{n}{2}\right)$, y sea $\widetilde{g}_n(\nu, \mu)$ el número de todos los grafos G de $\mathcal{G}_n$ en los que los pares con los números ν y μ son aristas. Entonces

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_n} p^2(G) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} \sum_{\mu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu, \mu) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu, \nu) + 2 \sum_{\nu<\mu} \widetilde{g}_n(\nu, \mu).$$

Pero $\tilde{g}_n(\nu, \mu) = 2^{\binom{n}{2}-2}$ si $\nu \neq \mu$. Por eso

$$Dp(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\binom{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}.$$

Suponiendo en (2) $\theta = \sqrt{n\overline{p}(n)}$, obtendremos que la parte de aquellos grafos $G \in \mathcal{G}_n$ para los cuales $\left|p(G) - \frac{1}{2}\binom{n}{2}\right| \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}\binom{n}{2}}$ no supera $1/n$. De esto se deduce que para casi todos los grafos $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$ donde el $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

5.24. Sea $p(G)$ el número de pares de diferentes vértices del grafo G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales no existe una cadena de longitud menor de 3, que una estos vértices. Sea $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G \in \mathcal{G}_n} p(G)$.

1) Mostrar que $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

2) Mostrar que en casi todos los n-grafos no hay vértices con una distancia entre ellos mayor que dos.

3) Empleando los resultados de los problemas 5.23 y 5.24, 2) mostrar que en casi todos los n-grafos el radio y el diámetro son iguales a dos.

5.25. Mostrar que el número medio de ciclos hamiltonianos en los grafos G de $\mathcal{G}_n$ es igual a $\frac{(n-1)!}{2^{n+1}}$.

5.26. Hallar el número medio de ciclos de longitud tres en los grafos G de $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.27*. Empleando la desigualdad de Chébishev (2) mostrar que en casi todos los $(n, m(n))$-grafos, donde $m(n) = [n/\ln(n \ln n)]$, el número de vértices aislados es igual a $n(1 - \varepsilon(n))$, donde el $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.

5.28*. Sea k un número entero y $k \geqslant 2$. Demostrar que si $m = m(n) = \varphi(n) \cdot n^{2-\frac{2}{k-1}}$ (donde $\varphi(n) \to \infty$ con $n \to \infty$), entonces casi todos los (n, m)-grafos contienen un subgrafo completo con k vértices.

5.29. Hallar el número medio de conjuntos independientes de k vértices en los grafos G de $\mathcal{G}_n$.

5.30. Sea k un número natural. Contar el número medio de vértices de grado k en los grafos G de $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.31. Sea $p(G)$ un parámetro numérico entero no negativo y $\overline{p}(n)$ su valor medio para los grafos G de $\mathcal{G}_n$. Mostrar que si el $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}(n) = 0$, entonces, para casi todos los grafos, $p(G) = 0$.

5.32. Hallar el índice cíclico del grupo de automorfismos del grafo G.

1) G es un ciclo de longitud 4;

2) $G = K_{2,3}$;

3) $G = K_5 - \{x\}$, donde x es una arista arbitraria del grafo K_5.

5.33. Sea $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ una partición arbitraria del número n, o sea que $j_1 + 2j_2 + \ldots + nj_n$, donde j_k son números enteros no negativos $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Por $h(j)$ se designa el número de todas las sustituciones del grupo simétrico S_n en las que los vectores de la estructura de ciclo coincide con (j).

1) Demostrar que $h(j) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{j_k} \cdot j_k!}$.

2) Demostrar que

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} h(j) \prod_{k=1}^{n} t_k^{j_k},$$

donde la suma se toma por todas las particiones posibles (j) del número n.

3) Mostrar que el índice de ciclo $Z(S_n)$ es igual al coeficiente de x^n en la descomposición de la función

$$\exp\left(t_1 x + \frac{t_2 x^2}{2} + \ldots + \frac{t_k x^k}{k} + \ldots\right)$$

en una serie por los exponentes de x.

4) Convencerse de la validez de la relación recurrente $Z(S_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} t_k Z(S_{n-k})$, donde (por definición) se ha puesto $Z(S_0) = 1$.

5.34. Sea A_n un grupo de signo variable de grado n (o sea que A_n es un subgrupo del grupo S_n $(n \geqslant 2)$ que consta de todas las sustituciones pares). Demostrar que

$Z(A_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) =$

$$= Z(S_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) + Z(S_n;\ t_1, -t_2, \ldots, (-1)^{n-1} t_n).$$

5.35. Enumerar todas las órbitas en el conjunto de vértices del grafo G determinadas por el grupo $\Gamma(G)$ si:

1) $G = K_{2,3} - \{x\}$, donde x es una arista arbitraria del grafo $K_{2,3}$;

2) $G = K_3 \times C_4$.

5.36. Supongamos que en el conjunto M_1 de n elementos actúa el grupo A y en el conjunto finito M_2 actúa el grupo unitario E. Demostrar que el número de órbitas en el conjunto $M_2^{M_1}$ que se determinan con el grupo exponencial E^A, se da con la fórmula

$$N(E^A) = Z(A;\ \overbrace{|M_2|, |M_2|, \ldots, |M_2|}^{n \text{ veces}}),$$

donde la parte derecha representa el resultado de la sustitución del número $|M_2|$ en el índice cíclico $Z(A;, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ en el lugar de todas las entradas de las variables t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.37. Supongamos que en el conjunto M de n elementos actúa el grupo A. Veamos dos r-subconjuntos arbitrarios del conjunto M: $M_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $M_2 = \{b_1, \ldots, b_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Estos se llaman *A-equivalentes* si existe una sustitución π en el grupo A, tal quo $\pi(a_j) = b_{i_j}$ donde $j = 1, \ldots, r$. La relación de A-equivalencia divide todos los r-subconjuntos de M en *clases A-equivalentes* de subconjuntos. Demostrar que el coeficiente de x^r en la expresión $Z(A; 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n)$ (obtenida del índice cíclico $Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ mediante la sustitución de cada entrada de la variable t_k por $1+x^k$) es igual al número de clases de los A-equivalentes r-subconjuntos en el conjunto M.

5.38. Sea $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k x^k$ una función arbitraria para los árboles radicales; aquí T_k significa el número de todos los árboles radicales no isomorfos de par en par con k vértices, incluyendo la raíz. Tomemos n árboles radicales arbitrarios $(n \geqslant 1)$ y unamos con una arista la raíz de cada uno de ellos con un vértice nuevo v_0. Consideraremos el vértice v_0 (y solamente este vértice) como la raíz de un árbol nuevo. El grado de la raíz v_0 es igual a n. Empleando la construcción descrita de generación de árboles radicales demostrar que

$$T(x) = x + x \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n;\ T(x),\ T(x^2),\ \ldots,\ T(x)^n).$$

5.39. Demostrar la siguiente relación recurrente:

$$T_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{r \mid k \\ 1 \leqslant r \leqslant k}} r T_r T_{n-k+1};$$

aquí $n \geqslant 1$ y T_j es igual al número de todos los árboles radicales no isomorfos de par en par con j vértices, contando también la raíz $(T_1 = 1)$.

5.40. Sean $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n x^n$, una función arbitraria para los grafos, y $l(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$, una función arbitraria para los grafos conexos. El coeficiente g_n (y respectivamente l_n) es igual al número de todos los grafos de n vértices no isomorfos de par en par (respectivamente, grafos conexos). Demostrar que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n;\ l(x),\ l(x^2),\ \ldots,\ l(x^n)).$$

5.41. Supongamos que en el conjunto de n elementos M_1 actúa el grupo A, y en el conjunto de r elementos M_2 actúa el grupo B.

Hallar el número de órbitas en el conjunto $M_2^{M_1}$ determinadas por el grupo exponencial B^A.

1) $A = E_n$, $B = E_r$ (o sea que A es el grupo unitario de exponente n, y B el grupo unitario de exponente r);

2) $A = E_n$, $B = S_r$;
3) $A = S_n$, $B = E_r$;
4*) $A = S_2$, $B = S_3$.

5.42. Sean $t(x)$ y $s(x)$ funciones generadoras para torneos y torneos fuertes respectivamente, o sea que $t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$ y $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$, donde t_n es el número de todos los torneos de n vértices no isomorfos de par en par y s_n es el número de todos los torneos fuertes de n vértices no isomorfos de par en par. Demostrar que $t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k(x)$.

§ 6. REALIZACION DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS POR MEDIO DE ESQUEMAS DE CONTACTO Y DE FORMULAS

La red Γ con k polos, en la que cada arista está marcada con una letra del alfabeto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ se llama *esquema de contacto k-polar que realiza las funciones booleanas de las variables* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, o abreviadamente, $\langle k, n\rangle$-esquema. Los $\langle 2, n\rangle$-esquemas se llamarán *X^n-esquemas*. La red Γ se llama *red del esquema de contacto*. El esquema de contacto se llama *conexo* (*fuertemente conexo*, *paralelo-sucesivo*, etc.) si su red también lo es. Un esquema de contacto paralelo-sucesivo abreviadamente se llama π-esquema. Las aristas del esquema que están marcadas con símbolos de las variables o de sus negaciones se llaman de *contacto*. Un contacto se llama de *clausura* si está marcado con un símbolo de variable, y de *apertura* si está marcado con un símbolo de negación de la variable. Sean Σ_1 y Σ_2 dos esquemas de contacto de k-polos y cuyos polos estén marcados con las letras $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Las esquemas Σ_1 y Σ_2 se llaman *isomorfos* si sus redes son isomorfas y al mismo tiempo: a) las aristas correspondientes están marcadas de la misma manera; b) los polos correspondientes están marcados de la misma manera; Supongamos que a y b son dos polos del esquema de contacto Σ; $[a, b]$ es cierta cadena que une a y b, y $K_{[a,b]}$ es la conjunción de las letras atribuidas a las aristas de la cadena $[a, b]$. La función $f_{ab}(\tilde{x}^n)$ determinada con la fórmula

$$f_{ab}(\tilde{x}^n) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}, \qquad 3)$$

en la cual la disyunción se toma por todas las cadenas simples del esquema que unen los polos a y b, se llama *función de conductividad entre los polos a y b* del esquema Σ. Se dice que el esquema Σ realiza la función $g(\tilde{x}^n)$ si en él existen unos polos a y b tales, que $g(\tilde{x}^n) = f_{ab}(\tilde{x}^n)$.

Un esquema de contacto con $k+1$ polos se llama *(1, k)-polar* si uno de sus polos está seleccionado y los demás son equivalentes entre sí (el polo seleccionado se designa con la letra a, los demás por las letras b_i $(i = \overline{1, k})$). Se dice que la función $g(\tilde{x}^n)$ *se realiza* con un esquema $(1, k)$-polar si existe un polo b_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tal, que $f_{ab_i}(\tilde{x}^n) = g(\tilde{x}^n)$. En el caso de que no se indique el número de polos del esquema siempre se sobreentenderá que se trata de un esquema de contacto de dos polos. Dos esquemas de contacto se llaman *equivalentes* si ellos realizan una misma función booleana. Se llama *complejidad* de un esquema de contacto a su número de contactos. Se llama *mínimo* a un esquema de contacto que tiene la menor complejidad entre todos los esquemas equivalentes a él. Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de esquemas de contacto* (la designación es $L_k(f)$) a la complejidad de un esquema de contacto mínimo que realiza f. Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de π-esquemas* al número de contactos en un π-esquema mínimo que realiza f (la designación es $L_\pi(f)$). Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de fórmulas* sobre el conjunto de enlaces $\{\vee, \&, \neg\}$ al número de entradas de los símbolos de las variables. La complejidad de la función f en esta clase de fórmulas se designa por $L_\Phi(f)$.

Se llama *esquema de elementos funcionales* a una red orientada sin contornos, los polos de la cual se dividen en polos de entrada y de salida. Los polos de entrada se marcan con los símbolos de las variables. Los polos de salida se llaman *salidas del esquema*. Cada vértice diferente del polo de entrada estará marcado con un símbolo funcional (o con un símbolo de enlace lógico). Al mismo tiempo se tienen que cumplir las condiciones siguientes: 1) El grado de llegada de cada polo de entrada es igual a cero. 2) El grado de llegada de cada vértice diferente del polo de entrada es igual al número de lugares del símbolo funcional (o del enlace) con el que está marcado este vértice.

El concepto de la *función f_i que se realiza en el vértice i del esquema* Σ, se define de la siguiente manera. Si el vértice i coincide con el polo de entrada que está marcado con el símbolo x, entonces $f_i = x$. Supongamos que el vértice i está marcado con el símbolo funcional φ de r lugares y que $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ son las funciones que se realizan en los vértices de los que salen los arcos que llegan al vértice i. Entonces $f_i = \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Se dice que la *función f se realiza con el esquema* Σ, si existe una salida del esquema en la que ella se realiza. Los esquemas de elementos funcionales con una salida, que tienen los polos de entrada marcados con los símbolos $x_1, \ldots, x_n$ y los vér-

tices diferentes de los polos de entrada, marcados con los símbolos $\vee$, &, $^-$, se llamaran aquí X^n *-esquemas funcionales.* Se llama *complejidad de los esquemas de elementos funcionales* al número de sus vértices diferentes de los polos de entrada. El X^n-esquema funcional Σ, que realiza la función f, se llama *mínimo* si cualquier otro X^n-esquema funcional que realice f tiene una complejidad no menor que la del esquema Σ. Por *complejidad de la función booleana f en la clase de esquemas de elementos funcionales aquí* se comprende la complejidad de un X^n-esquema funcional que realiza la función f. La complejidad de la función f en esta clase de esquemas se designará por $L(f)$.

6.1. Supongamos que $f(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$. Mostrar que $L(f(\tilde{x}^2)) = 4$.

6.2. Mostrar que para una función booleana diferente de una constante el esquema de contacto mínimo que realiza esta función es fuertemente conexo.

6.3. Hallar el número de funciones booleanas $f(x_1, x_2)$ que se realizan con esquemas de contacto de complejidad 3.

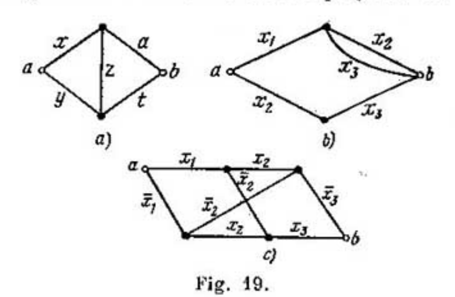


Fig. 19.

6.4. 1) Mostrar que para cada número natural m existe un esquema de contacto mínimo de complejidad m.

2) Mostrar que no existen esquemas de contacto mínimos de complejidad 4 que contengan sólo contactos de clausura con marcas del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$.

6.5. Mostrar que si $m > n \cdot 2^{n-1}$, entonces ninguno de los X^n-esquemas de complejidad m es mínimo.

6.6. Mostrar que la función f entonces, y solamente entonces, depende sustancialmente de la variable x, cuando en el esquema mínimo que realiza f hay un contacto marcado con la variable x o con su negación.

6.7. Hallar la función de conductividad f_{ab} para los esquemas de contacto representados en la fig. 19, *a, b, c* y 20, *a, b, c*.

6.8. Construir esquemas de contacto que realicen la función f.

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (00011111)$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (11010001)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

6.9. Construir para cada una de las funciones del problema anterior X^3-esquemas funcionales.

6.10. Construir para la función f un esquema de contacto de complejidad no mayor que L, simplificando previamente la fórmula con la cual se da la función f.

1) $(x_1 \vee x_2x_3)((x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_4) \vee (x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_4x_5))$, $L = 5$;

2) $(x_1 \vee x_2)((x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)x_6 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee$ $\vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_6)x_3 \vee x_1x_2 \vee x_5x_6)$, $L = 5$;

3) $\bar{x}_1x_2x_3((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5)(x_6 \vee x_1x_4x_7) \vee (x_6x_7 \vee x_2x_4x_5\ \&$ $\&\ (\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_3x_6\bar{x}_7) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_4 \vee x_6)(x_5 \vee x_7))$, $L = 6$.

6.11. Construir para cada una de las funciones del problema anterior un esquema de elementos funcionales de complejidad no mayor que 6 que realice esta función.

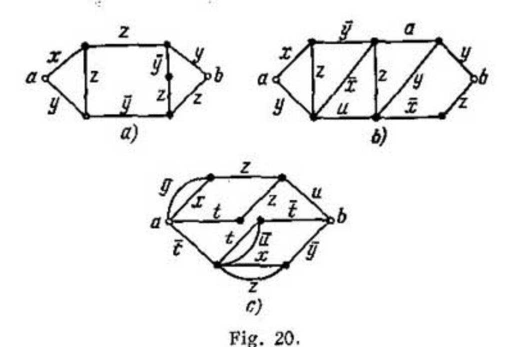


Fig. 20.

6.12. Supongamos que $\nu(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^i \alpha_i$ es el número de la colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Construir un esquema de contacto que no tenga más de diez contactos y que realice la función

$$f(\tilde{\alpha}^6) = \begin{cases} 1, & \text{si } \nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leqslant \nu(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

6.13. Construir un esquema de contacto que realice la función $f(\tilde{x}^6)$ que es igual a la unidad si, y sólo si, $(x_1, x_2, x_3) \leqslant (x_4, x_5, x_6)$.

6.14. Construir un esquema de contacto que realice la suma de números binarios de dos órdenes. Más exactamente: construir un

esquema de contacto con los polos a, b_0, b_1, b_2, en el cual para cada $i = 0, 1, 2$, la función de conductividad $f_{ab_i}(\tilde{x}^4)$ sea igual a z_i, donde $z_i \in \{0, 1\}$ y se determina de la igualdad

$$4z_1 + 2z_2 + z_3 = 2(x_1 + x_2) + x_3 + x_4.$$

6.15*. Construir un esquema de elementos funcionales que satisfaga las condiciones siguientes.

1) El esquema realiza tres funciones $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$.

2) Los vértices diferentes de los polos de entrada estarán marcados con los símbolos $\vee$, &, $^{-}$.

3) No habrá más de dos vértices marcados con el símbolo de negación.

6.16. Mostrar que $L_\Phi(f) \geqslant L_k(f)$ para cualquier función booleana f, diferente de una constante.

6.17*. Poner el ejemplo de una función $f(\tilde{x}^3)$ para la cual $L_\pi(f) > L_k(f)$.

INDICACION. Examinar la función que se realiza con el esquema representado en la fig. 19, *a*.

Supongamos que el esquema biconexo bipolar de contacto Σ es plano (o sea que su red $\Gamma(a, b)$ es plana) y sus polos a y b se encuentran en una cara. Tracemos en esta cara la arista (a, b) de tal manera que la red Γ' obtenida de Γ al añadir la arista (a, b) siga siendo plana. Seleccionemos un vértice en cada cara de la red Γ'. Construyamos en los vértices seleccionados el grafo G^* dual al grafo G de la red Γ'. Cada arista del grafo G^* diferente de (a, b) cruza cierto contacto del esquema Σ. Marquemos esta arista con la misma letra que está marcado el contacto cruzado. Designemos por a^*, b^* los vértices del grafo G^* que están en las caras de la red Γ' divididas por la arista (a, b) y llamémoslos polos. Al extraer ahora la arista (a^*, b^*) de G^* se obtendrá el esquema doblemente conexo Σ^* con los polos a^* y b^*. El esquema Σ^* se llama *esquema dual a* Σ.

6.18*. Mostrar que el esquema Σ^*, que es dual al esquema plano biconexo Σ, realiza una función booleana dual a la que realiza el esquema Σ.

INDICACION. Establecer una relación biunívoca entre las cadenas del esquema Σ y los cortes del esquema Σ^*.

6.19. Construir esquemas duales a los esquemas representados en las figs. 19, *a*, *b* y 20, *a*.

6.20. Demostrar que para cualquier función booleana f se cumple la igualdad $L_\pi(f) = L_\pi(f^*)$.

6.21. Mostrar que si $L_k(f) \leqslant 7$, entonces $L_k(\bar{f}) = L_k(f)$.

Se dice que un esquema de contacto está formado *sin repetición* (es sin repetición) si del hecho de que cierta arista esté marcada con la letra x o $\bar{x}$ se deduce que cualquier otra arista tiene una marca diferente de x o $\bar{x}$.

6.22. Mostrar que un esquema de contacto fuertemente conexo y sin repetición realiza una función sustancialmente dependiente de todas las variables que se encuentran en el esquema.

6.23. Mostrar que un esquema fuertemente conexo y sin repetición es mínimo.

6.24. Mostrar que si a un esquema mínimo se la une un contacto marcado con una variable nueva de tal forma que resulte un esquema fuertemente conexo, entonces este esquema así construido también será mínimo.

6.25*. Sea f una función que se realiza con el esquema indicado en la fig. 21. Demostrar que una función dual a f no puede ser realizada con un esquema sin repetición.

6.26*. ¿Es cierto que para todas las funciones booleanas f se cumple la relación $L_k(f) = L_k(\overline{f})$?

6.27. Sean f_{ab} y f_{ad} las funciones de la conductividad del esquema de contacto de tres polos Σ_1 y f_{eg} y f_{eh}, las funciones de la conductividad del esquema de contacto de tres polos Σ_2. Sea Σ el esquema con los polos a y e, obtenido de los esquemas Σ_1 y Σ_2 identificando el polo b con el polo g, y el polo d con el polo e. ¿Es cierto que el esquema Σ realiza la función

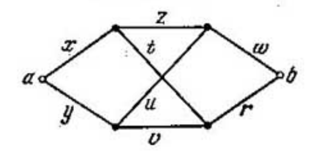


Fig. 21.

$$f_{ae} = (f_{ab} \,\&\, f_{eg}) \vee (f_{ab} \,\&\, f_{eg})?$$

6.28. 1) Demostrar que la función f es monótona si, y sólo si, existe un esquema de contacto que realiza f y no contiene contactos interruptores.

2) ¿Es cierto que un esquema de contacto mínimo que realiza una función monótona no contiene contactos interruptores?

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *monótona por la variable* x_1 si se la puede representar en la forma

$$f(\widetilde{x}^n) = g(x_2, x_3 \ldots, x_n) \vee x_1 h(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

La función $f(\widetilde{x}^n)$ es *casi monótona por la variable* x_1 si ella es monótona por x_1 o se hace monótona por x_1 después de la sustitución de x_1 por $\overline{x}_1$. La monotonía y la casimonotonía por x_i $(i \neq 1)$ se definen en forma análoga.

6.29. Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ es casi monótona por x_1 si, y sólo si, existe un esquema de contacto que realiza la función $f(\widetilde{x}^n)$ y no contiene contactos de clausura o de interrupción.

6.30. 1) Demostrar que un esquema de contacto mínimo que realiza la función $x_1 \oplus x_2$ contiene 4 contactos.

2*) Demostrar la calidad de mínimo del esquema representado en la fig. 20, *c*.

6.31*. Construir un esquema de contacto mínimo para la función f

1) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_1x_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4$;

3) $\tilde{f}(x^4) = (0001011101111111)$.

6.32. Mostrar que el número $S(n, m)$ de X^n-esquemas de contacto conexos, no isomorfos de par en par, de complejidad no mayor que m, no supera a $(cnm)^m$, donde c es una constante que no depende de n y m.

6.33. Mostrar que el número $P(n, m)$ de π-esquemas conexos, no isomorfos de par en par, de complejidad no mayor que m, que realizan las funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no supera (cn^m), donde c es una constante que no depende de n y m.

6.34. Mostrar que el número $\Phi(n, m)$ de fórmulas, diferentes de par en par, de complejidad m, sobre el conjunto de enlaces $(\vee, \&, -)$ y el conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no supera a $(cn)^m$, donde c es una constante que no depende de n y m.

Al obtener las evaluaciones inferiores de la complejidad de realización de diferentes clases de funciones con esquemas y fórmulas, con frecuencia se emplean las llamadas «consideraciones vigorosas». Como ejemplo de esto puede valer la afirmación siguiente.

Sea $S(n, m)$ el número de esquemas de cierta clase K. Cada uno de ellos realiza una función booleana que depende de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y tiene una complejidad no mayor que m. Sea $\varphi(n)$ el número de funciones booleanas $f(\tilde{x}^n)$ en cierto conjunto $\mathfrak{M}$. Entonces si $S(n, m) < \varphi(n)$, én $\mathfrak{M}$ habrá una función $f(\tilde{x}^n)$ no realizable en la clase K de un esquema de complejidad menor o igual a m.

6.35. Mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grandes existe una autodual $f(\tilde{x}^n)$ para la que se cumplen simultáneamente las desigualdades:

a) $L_k(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)$; b) $L_\pi(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\log_2 n}(1-\varepsilon)$.

6.36. Mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grandes existe una función $f(\tilde{x}^n)$ que es superposición de la función $\varphi(x, y, z) = xy \vee z$ tal que

$$L_\Phi(f) \geqslant \frac{\binom{n-1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\log_2 n}(1-\varepsilon).$$

6.37. Sea $L(n) = \max\limits_{f \in P_2^n} L(f)$. Mostrar que para cualquier función autodual $f(\tilde{x}^n)$ es válida la desigualdad $L(f(\tilde{x}^n)) \leqslant L(n-1) + 4n$.

6.38. La función booleana $F(\widetilde{y}^m)$ tiene la propiedad U_n si se puede obtener cualquier función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ de $F(\widetilde{y}^m)$, mediante la sustitución de constantes y la redesignación de las variables (se admite la identificación).

1) Mostrar que la función $y_1\bar{y}_2$ tiene la propiedad U_1.

2) Hallar una función con el número mínimo posible de variables que tenga la propiedad U_2.

3) Sea $m(n)$ el número mínimo posible de variables en la función que tiene la propiedad U_n. Mostrar que

$$\frac{2^n}{\log_2(n+2)} \leqslant m(n) \leqslant 3\cdot 2^{n-1}.$$

6.39. Mostrar que existe un X^n-esquema funcional de complejidad $2^{2^n} - n$ que realiza todas las funciones dependientes de las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Al construir esquemas de contacto de dos polos que realizan las funciones del álgebra lógica se emplea ampliamente el método llamado *método de las cascadas*. Lo describiremos aquí. Supongamos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$ es una función del álgebra lógica que hay que realizar con un esquema de contacto. Por $\mathfrak{A}_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ designamos el conjunto de todas las funciones de álgebra lógica tales, que cada una de ellas depende sólo de las variables x_{i+1}, $x_{i+2}, \ldots, x_n$ y puede ser obtenida de la función $f(\widetilde{x}^n)$ en resultado de una sustitución adecuada de ceros y unidades en el lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$. A cada conjunto $\mathfrak{A}$ le cotejamos biunívocamente el conjunto V_i cuyos elementos son puntos de un plano llamados *vértices de i-ésimo rango*. Añadiremos dos polos más: el polo de entrada a y el polo de salida b. El polo a es un vértice de rango cero, el polo b es un vértice de n-ésimo rango. El conjunto de vértices del esquema Σ que realiza la función $f(\widetilde{x}^n)$ coincidirá con $\{a\} \cup \cup \{b\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. El conjunto de contactos del esquema Σ puede ser descrito de la manera siguiente: sea v_i un vértice arbitrario de i-ésimo rango $(n-2 \geqslant i \geqslant 0)$ y que le corresponda la función $\varphi(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ del conjunto $\mathfrak{A}_i$ (con $i = 0$, la función φ coincide con la función $f(\widetilde{x}^n)$). Las funciones $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ y $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ pertenecen al conjunto $\mathfrak{A}_{i+1}$ y a ellas les responden ciertos vértices v'_{i+1} y v''_{i+1} respectivamente (si las funciones $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ y $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ son iguales, entonces los vértices v'_{i+1} y v''_{i+1} coinciden). El vértice v_i en el esquema Σ está unido por el contacto $\bar{x}_{i+1}$ al vértice v'_{i+1} y por el contacto x_{i+1} al vértice v''_{i+1}. Por fin, los vértices del $(n-1)$-ésimo rango se unen con el vértice del n-ésimo rango (el polo b) en concordancia con la regla siguiente:

1) si el vértice v de V_{n-1} responde a la función x_n, entonces ella se une con el polo b por el contacto x_n;

2) si el vértice v responde a la función $\overline{x}_n$, entonces ella se une con b por el contacto $\overline{x}_n$;

3) si el vértice v está cotejado a una función idénticamente igual a la unidad, entonces se une con b por dos contactos paralelos x_n y $\overline{x}_n$;

4) si el vértice v está cotejado a un cero idéntico, entonces el vértice v no se une con el polo b.

6.40. Construir, empleando el método de las cascadas, un esquema que realice la función f.

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \ldots x_n \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$;

5) $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n$.

6.41. 1) Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \not\equiv 0$, entonces al construir con el método de las cascadas un esquema de contacto que realice la función f se pueden excluir de todos los conjuntos $\mathfrak{A}_i$ las funciones idénticamente iguales a cero.

2) Mostrar que un esquema de contacto obtenido con una construcción tal es fuertemente conexo.

6.42. 1) Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ depende sustancialmente de todas sus variables. Demostrar que un esquema que realice la función f y que esté construido con el método de las cascadas, es fuertemente conexo y no contiene contactos paralelos del tipo x_j, $\overline{x}_j$ si, y sólo si, f es una función lineal.

2) Poner el ejemplo de una función no lineal $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ que dependa sustancialmente de todas sus variables y tal que el esquema que la realice, construido con el método de las cascadas, no tenga contactos paralelos del tipo x_j y $\overline{x}_j$.

6.43. ¿Es justa la afirmación siguiente? Si la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$, depende sustancialmente de todas sus variables y el esquema de contacto que realiza f, construido con el método modificado de las cascadas indicado en el problema 6.41. 1), contiene n contactos, entonces $f = x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$ (donde $\sigma_i \in \{0, 1\}$.)

6.44. Refutar la afirmación siguiente: si la función f es tal que con cierto i los conjuntos $\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{A}_{i+1}$ empleados en el método de las cascadas no contienen funciones idénticamente iguales a cero y a uno, pero en cada uno de ellos hay no menos de tres funciones, entonces el esquema que realiza f, construido con el método de las cascadas, no es plano [1]).

6.45. Poner el ejemplo de una función f para la cual el esquema que la realiza, construido con el método de las cascadas, no es plano.

[1]) Se tiene en cuenta un esquema sin arista *inicial* o sea sin arista complementaria que una los polos.

Capítulo
V

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE CODIFICACION

§ 1. CODIGOS CON CORRECCION DE ERRORES

Sean A y B dos alfabetos finitos, y R algún conjunto de palabras finitas en el alfabeto A. La aplicación unívoca φ del conjunto R en algún conjunto de palabras en el alfabeto B se llama *codificación del conjunto* R. La imagen C del conjunto R para la aplicación φ se denomina *código del conjunto* R. A las palabras de C se les da el nombre de *palabras en código*; además, si la palabra w de R es aplicación en la palabra v de C, entonces v se llama *código de la palabra* w. Las palabras de R se denominan *comunicaciones*; el alfabeto A, *alfabeto de comunicaciones*; el B, *alfabeto codificador*. Si este alfabeto B se compone de dos letras (en tal caso supondremos que $B = \{0, 1\}$), entonces la codificación φ y el correspondiente código C se llaman *binarios*. El código se llama *uniforme* o *en bloque*, si todas las palabras codificadas tienen igual longitud. El código binario en bloque, en el que cada palabra codificada posee longitud n, se presenta como el conjunto de los vértices de un cubo n-dimensional. La función de Boole $f_C(\tilde{x}^n)$, que es igual a la unidad en el conjunto C y a cero si está fuera de C, se denomina *función característica del código de bloque binario* C. Sea $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ una distancia común de Hamming entre los vértices $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de B^n, igual al número de coordenadas en las que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se diferencian. La magnitud $d(C) = \min \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, donde el mínimo se toma con respecto a todos los pares de vértices distintos, pertenecientes al código $C \subseteq B^n$, se llama *distancia de código* de C. El código $C \subseteq B^n$ con distancia de código d, será llamado abreviadamente *(n, d)-código*. La potencia máxima posible del (n, d)-código se connota mediante $m(n, d)$, y el (n, d)-código cuya potencia es $m(n, d)$, se denomina *maximal*. Se llama *compactamente empaquetado* el $(n, 2d+1)$-código, que cumple la siguiente condición para todo vértice $\tilde{\alpha} \in B^n$ existe la palabra codificada $\tilde{\beta}$, para la cual $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant d$. Un código binario en bloque se denomina *equidistante*,

si la distancia entre dos cualesquiera palabras en código es igual. El código $C \subseteq B^n$ se llama *equiponderado*, si toda palabra codificada tiene un mismo peso, o sea, si existe un entero k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ tal, que $C \subseteq B^n_k$. Este número k se denomina *peso del código equiponderado*. La magnitud máx $|C|$, donde el máximo se toma para todos $\langle n, d\rangle$-códigos de peso k, se anota mediante $m(n, k, d)$.

Sea que la palabra de un código binario en bloque C se transmite por un canal de enlace, en el que pueden suceder tergiversaciones de la palabra transmitida. La transmisión por un canal así, puede considerarse como una cierta transformación de las palabras transmitidas. Aquí serán examinadas solamente tales transformaciones de las palabras binarias, que no modifican la longitud de la palabra y que consisten en el reemplazo de algunas letras por sus contrarias, o sea, en el reemplazo del 0 por el 1 y del 1 por el 0. Si la palabra $\tilde{\alpha}$ al ser transmitida se transformó en la palabra $\tilde{\beta}$, distinta de $\tilde{\alpha}$, entonces se dice, que *en el canal hubo errores*. Si la i-ésima letra de la palabra $\tilde{\alpha}$ transmitida se diferencia de la i-ésima letra de la palabra $\tilde{\beta}$ recibida, entonces se dice que hubo *un error en el i-ésimo orden*. Si la palabra recepcionada se diferencia de la transmitida en t órdenes, entonces se dice, que *hubieron t errores*. Evidentemente, el número de errores que han ocurrido durante la transmisión, es igual a la distancia de Hamming entre las palabras transmitidas y recibidas.

Sea el código binario $C \subseteq B^n$. La aplicación unívoca arbitraria ψ del conjunto B^n en el conjunto C se llama *decodificación*. Supongamos, que $\tilde{\alpha} \in C$, y que $\psi^{-1}(\tilde{\alpha})$ es el conjunto de todos aquellos $\tilde{\beta}$ vértices de B^n; tales que $\psi(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$. Sea también $S^n_t(\tilde{\alpha})$ el conjunto de todas las palabras que se obtienen de la palabra en código $\tilde{\alpha}$ como resultado de no más de t errores (es evidente, que $S^n_t(\tilde{\alpha})$ es una esfera de radio t con centro en $\tilde{\alpha}$). Se dice, que el código C *corrige t errores*, si es que existe tal decodificación ψ, que $S^n_t(\tilde{\alpha}) \subseteq \psi^{-1}(\tilde{\alpha})$, para cada $\tilde{\alpha} \in C$. El código C *descubre t errores*, si cualquier palabra que pueda ser obtenida de una palabra en código $\tilde{\alpha}$ arbitraria, como resultado de no más de t errores, resulta diferente de cualquier palabra de $C \setminus \{\tilde{\alpha}\}$.

1.1. Mostrar que el código $C \subseteq B^n$ corrige t errores si, y sólo si, $\rho(v, w) \geqslant 2t + 1$, para cualesquiera dos palabras en código v y w de C, distintas.

1.2. ¿Es cierto, que el código $C \subseteq B^n$, que corrige t errores, descubre:

1) no menos de $2t + 1$ errores;
2) no menos de $2t$ errores;
3) no más de $2t$ errores?

1.3. Mostrar que de todo subconjunto $C \subseteq B^n$ se puede obtener un código que descubra un error, quitando de C no más de la mitad de los vértices.

1.4. Determinar cuántos errores corrige y cuántos descubre el código con función característica f.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$;

3) $f(\tilde{x}^{3n}) = x_1 x_2 \ldots x_{3n} \vee x_1 x_2 \ldots x_{2n} \bar{x}_{2n+1} \bar{x}_{2n+2} \ldots$ $\ldots \bar{x}_{3n} \vee x_1 x_2 \ldots x_n \bar{x}_{n+1} \bar{x}_{n+2} \ldots \bar{x}_{3n} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots x_{3n}$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \oplus x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_n \oplus \ldots$ $\ldots \oplus x_2 x_3 \ldots x_n$.

1.5. Supongamos que la palabra del código binario C se transmite por un canal de enlace. Al efectuar la transmisión de la palabra en código no puede suceder más de un error. Para cada palabra en código $\tilde{\alpha}$ construir el conjunto de aquellas palabras que pueden ser obtenidas después de la transmisión de $\tilde{\alpha}$ por el canal.

1) $C = \{01100,\ 00111,\ 11010,\ 10001\}$;
2) $C = \{11110,\ 10100,\ 01011,\ 11001\}$.

Sea que la probabilidad de que al transmitir por el canal de enlace la palabra arbitraria w de B^n tenga lugar un error en el i-ésimo orden, sea igual a p para todas las $i = \overline{1, n}$. Sea cierto código $C \subseteq B^n$ de potencia m, y $\psi\colon B^n \to C$ la decodificación. La magnitud

$$Q_\psi(p, C) = \frac{1}{m} \sum_{v \in C} \sum_{w \in \psi^{-1}(v)} p^{\rho(v, w)} (1-p)^{n-\rho(v, w)}$$

se llama *certeza de la decodificación* ψ *para el código* C.

1.6. Mostrar, que para $0 < p < 1/2$, el máximo de la cantidad $Q_\psi(p, C)$ para todas las decodificaciones posibles de un C dado, se obtiene con la condición, que para cada $w \in B^n$ se cumpla la igualdad $\rho(w, \psi(w)) = \min\limits_{v \in C} \rho(w, v)$.

1.7. 1) Para el código C del problema 1.5, 1), construir la decodificación ψ con la certeza máxima $Q_\psi(p, C)$, $0 < p < 1/2$, indicando para cada $w \in C$ el conjunto $\psi^{-1}(w)$. Hallar el $\max\limits_{\psi} Q_\psi(1/4, C)$.

2) ¿Cuántas decodificaciones distintas ψ con certeza máxima existen para el código C del problema 1.5, 1) y $0 < p < 1/2$?

1.8. Hallar la potencia máxima posible del código $C \subseteq B^n$, que posee la siguiente propiedad: es par para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de $C\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

1.9. ¿Cuántos códigos maximales $\langle n, 2\rangle$ existen?

1.10. Sea $n = 3k$. Mostrar, que $m(n, 2n/3) = 4$.

1.11. Mostrar que la potencia del $\langle n, 2d+1\rangle$-código compactamente empaquetado es igual a $2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$.

1.12. ¿Existe el $\langle n, 3\rangle$-código compactamente empaquetado para $n = 147$?

1.13. Mostrar que para $n > 7$ no existen $\langle n, 7\rangle$-códigos compactamente empaquetados.

1.14. Demostrar que el código $C \subseteq B^n$ no es máximo, si $|C| = 3$.

1.15. Mostrar que si en B^n existe un $\langle n, 3\rangle$-código compactamente empaquetado, entonces existe la partición del cubo B^{n+1} en esferas no intersecadas de radio 1.

1.16. Sea C un $\langle n, 2d+1\rangle$-código compactamente empaquetado. Mostrar, que entonces $\binom{n}{d+1}$ es divisible sin resto por $\binom{2d+1}{d}$.

1.17. Mostrar que no existen $\langle n, 2d+1\rangle$-códigos equidistantes de potencia mayor que 2.

1.18. Mostrar que para un d par, existe un código equidistante de potencia $[2n/d]$.

1.19. Mostrar que $m(n, d)$ es una función no decreciente del parámetro n.

1.20. Mostrar que:

1) $m(n+d, d) \geqslant 2m(n, d)$;
2) $m(2n, d) \geqslant (m(n, d))^2$;
3) $m(n, d) \leqslant 2m(n-1, d)$.

1.21. Demostrar que $m(n, 2t+1) \geqslant 2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{2t} \binom{n}{i}$.

1.22. Demostrar que

$$m(n, k, 2d) \geqslant \frac{\binom{n}{k}}{\sum\limits_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}}.$$

1.23. Demostrar que para $n < 2d$ es justa la desigualdad

$$m(n, d) \leqslant \frac{2d}{2d-n}.$$

1.24. Demostrar que

$$m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{nd}{2k^2 - n(2k-d)}\right],$$

si $2k^2 - n(2k-d) > 0$.

1.25. Mostrar que:

1) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{k} m(n-1, k-1, d-1)\right]$;

2) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{d}\left[\frac{n-1}{d-1}\left[\ldots\left[\frac{n-d}{k-d}\right]\ldots\right]\right]\right]$;

3) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{n-k} m(n-1, k, d)\right]$.

1.26. Sea $q(n, d)$ el número máximo de vértices en B^n, siendo que la distancia entre cualesquiera dos de ellos no supera a d. Demostrar que

$$m(n, d+1)\, q(n, d) \leqslant 2^n.$$

1.27. Demostrar que $m(n, d) \leqslant 2^{n-d+1}$.

1.28. Mostrar que de todo conjunto $C \subseteq B^n$, tal que $|C| \geqslant 2^d$, se puede separar un subconjunto D de potencia no menor que $2^{-d+1}|C|$, que es un $\langle n, d\rangle$-código.

§ 2. CODIGOS LINEALES

La expresión de la forma

$$\lambda_1\widetilde{\alpha}_1 \oplus \lambda_2\widetilde{\alpha}_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_s\widetilde{\alpha}_s, \qquad (1)$$

donde $\widetilde{\alpha}_i \in B^n$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, s}$ se llama *combinación lineal de los vectores* $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$. La combinación lineal (1) se denomina *trivial*, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$, y no trivial en el caso contrario. Toda combinación lineal [1]) de vectores de B^n resulta, evidentemente, un vector de B^n. Los vectores $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$ de B^n se llaman *linealmente independientes*, si cualquier combinación lineal no trivial de los mismos es distinta de $\widetilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. En caso contrario se dice que los vectores $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s$ son *linealmente dependientes*. El subconjunto $G \subseteq B^n$ se denomina *grupo*, si G es cerrado con respecto a la operación de suma por módulo 2, o sea, si para cualesquiera $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ de G, el vector $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}$ pertenece a G. Del carácter cerrado de G con respecto a la operación de $\oplus$ se deduce, que toda combinación lineal de vectores de G también pertenecerá a G (en particular, $\widetilde{0} \in G$). De este modo, todo grupo C en B^n resulta ser un *espacio vectorial lineal sobre el campo* $F_2 = \langle\{0, 1\}, \oplus, \cdot\rangle$. El mayor número $k = k(C)$, para el cual en el grupo (en el espacio lineal) G existen k vectores linealmente independientes, se denomina *dimensión* de G. El conjunto de los k vectores linealmente independientes de un espacio de dimensión k, se llama *base* de este espacio. Si el código $G \subseteq B^n$ genera un grupo, entonces él se denomina *lineal* o *grupal*. Si un código lineal en B^n tiene dimensión k, entonces se llama *(n, k)-código*. El código binario lineal que corrige un error, se denomina *código de Hamming*.

Es cómodo expresar a los códigos por medio de matrices. La matriz $H(C)$, cuyas filas son palabras codificadas del código $C \subseteq B^n$, se llama *matriz del código C*. La matriz $M(C)$, compuesta de k vectores linealmente independientes arbitrarios, que son palabras codi-

---

[1]) La definición de las operaciones de suma de vectores por módulo 2 y del producto de un escalar por un vector fue dada en el § 1 del cap. I.

ficadas del (n, k)-código C, se llama *matriz generadora* del código C. Si H es una matriz arbitraria de ceros y unidades con n columnas, entonces el conjunto $C(H)$ de todos los vértices del cubo B^n, que son combinaciones lineales de las filas de la matriz H, se llama *código engendrado por la matriz H*. Los vectores $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ se denominan *ortogonales*, si $\alpha_1\beta_1 \oplus \alpha_2\beta_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n\beta_n = 0$. El conjunto $V(H)$ de todos los vectores de B^n, ortogonales a cada una de las filas de la matriz H, se llama *espacio nulo de la matriz H*. Sea C un código binario, en el que cada palabra es ortogonal a cada fila de alguna matriz H. Si C es $(n-k)$-código, y la matriz H se compone de $n-k$ filas linealmente independientes, entonces H se llama *matriz de comprobación del código C*. El conjunto C^* de todos los vectores representados en forma de combinación lineal de las filas de la matriz de comprobación del (n, k)-código C, se denomina *código dual del código C*. Mediante $g(n, d)$ se designa el máx $|C|$, donde el máximo se toma con respecto a todos los códigos lineales $C \subseteq B^n$ con distancia de código d.

2.1. Sea que el conjunto $C \subseteq B^n$ se compone de k vectores linealmente independientes. Mostrar que cualesquiera dos combinaciones lineales de vectores del conjunto C, que se diferencian en sus coeficientes, representan distintos vértices del cubo B^n.

2.2. Mostrar que en B^n existe un sistema de n vectores linealmente independientes, pero no existe ninguno de $n+1$ vectores linealmente independientes.

2.3. Mostrar que el número de vectores de B^n, representados por combinaciones lineales de la forma (1), en las que la $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \leqslant t$, no supera la $\sum_{i=0}^{t} \binom{s}{i}$.

2.4. Mostrar que todo (n, k)-código tiene potencia 2^k.

2.5. Mostrar que en un código lineal binario, o bien cada vector código tiene peso par, o bien la mitad de los vectores códigos tiene peso par, y la otra mitad peso impar.

2.6. Mostrar que el número de bases distintas en B^n es igual a

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1})}{n!}.$$

2.7. Mostrar que el número de (n, k)-códigos distintos en B^n es igual a

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{k-1})}{(2^k-1)(2^k-2)\ldots(2^k-2^{k-1})}.$$

2.8. Hallar el número de vectores de B^n que sean ortogonales a un vector dado $\tilde{\alpha}$ de B_k^n.

2.9. Mostrar que el conjunto de todos los vectores de B^n ortogonales a cada una de las filas de la matriz binaria H de dimensiones

$k \times n$, toma un espacio lineal. ¿Acaso siempre este espacio tiene una dimensión $n - k$?

2.10. ¿Es cierto que para cada código lineal se puede indicar una matriz H, que sea:

1) generadora;

2) de comprobación?

2.11. A base de la matriz dada H, indicar la potencia $m\,(C\,(H))$ del código $C\,(H)$ por ella engendrado, y la distancia de código $d\,(C\,(H))$.

$$1)\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aquí la matriz H tiene una dimensión $n \times n$;

4) $H = (I_k P)$, donde I_k es una matriz unidad de dimensiónes $k \times k$, y P una matriz binaria arbitraria de dimensiones $k \times (n - k)$, siendo que en cada fila de la misma por lo menos hay dos unidades, $k \leqslant n - \log_2 (n + 1)$;

5) $H = (I_5 Q)$, donde I_5 es una matriz unidad de dimensiones 5×5, y

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.12. Sea $V \subseteq B^n$ un espacio, compuesto de las combinaciones lineales de las filas de la matriz $H = (I_k P)$, donde I_k es una matriz unidad de dimensiones $k \times k$, y P una matriz compuesta por ceros y unidades, de dimensiones $k \times (n - k)$. Demostrar, que V es un espacio nulo de la matriz $G = (P^T I_{n-k})$, donde I_{n-k} es una matriz unidad de dimensiones $(n - k) \times (n - k)$, y P^T es la matriz traspuesta de P.

2.13. Para el código engendrado por la matriz H del problema 2.11, 1), construir la matriz de comprobación.

2.14. Mostrar que si $C \subseteq B^n$ es un (n, k)-código, entonces el código dual a C resulta un $(n, n - k)$-código.

2.15. Sea $H(C)$ la matriz del (n, k)-código $C \subseteq B^n$, no contenedora de columnas nulas. Mostrar que:

1) cada columna de la matriz $H(C)$ tiene 2^{k-1} unidades y la misma cantidad de ceros;

2) la suma de los pesos de las filas de la matriz $H(C)$ es igual a $n\,2^{k-1}$.

2.16. Mostrar que la distancia de código del código lineal $C \subseteq B^n$ es igual al minimal de los pesos de sus vectores no nulos.

2.17. Mostrar, que la distancia de código del (n, k)-código no supera a $[n2^{k-1}/(2^k - 1)]$.

2.18. Mostrar que para $n = 2d - 1$, la potencia del $\langle n, d\rangle$-código lineal no supera a $2d$.

2.19. 1) Mostrar, que la potencia maximal posible $g(n, d)$ del $\langle n, d\rangle$-código lineal, satisface la desigualdad $g(n, d) \leqslant 2g(n - 1, d)$.

2) Utilizando el resultado del problema 2.18, mostrar que $g(n, d) \leqslant d \cdot 2^{n-2d+2}$.

2.20. Sea que el código C es un espacio nulo de la matriz H. Mostrar que la distancia de código de C no es menor que d si, y sólo si, cualquier conjunto de un número $d - 1$ o menor de columnas de la matriz H, resulta linealmente independiente.

2.21. Mostrar que si $\sum\limits_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} < 2^k$, entonces existe una matriz de ceros y unidades de dimensiones $k \times n$, en la que cualesquiera $d - 1$ columnas son linealmente independientes y, en consecuencia, existe un $(n, n - k)$-código con distancia de código d, o mayor que d.

2.22. Sea $H_{k,n}$, una matriz de dimensiones $k \times n$, donde $k =]\log_2(n + 1)[$, y en la que la columna con número i representa una descomposición binaria del número i $(i = \overline{1, n})$. Por ejemplo, para $n = 6$, la matriz $H_{3,6}$ tiene la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Mostrar, que el espacio nulo de la matriz es un código de Hamming, o sea, un código lineal que corrige un error.

2) Construir un código que resulte ser un espacio nulo de la matriz $H_{3,6}$.

3) ¿Cuántos errores corrige el código engendrado por la matriz $H_{k,n}$?

2.23. Se llama especto del conjunto $C \subseteq B^n$ al vector $\tilde{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, donde s_r es el número de los pares de vértices de C, que tienen una distancia r entre ellos. Mostrar que para todo (n, k)-código C, existe un (n, k)-código C', que tiene el mismo espectro y que posee la forma de una matriz generadora $(I_k P)$, donde I_k es

la matriz unidad de dimensiones $k \times k$, y P es alguna matriz compuesta por ceros y unidades, de dimensiones $k \times (n - k)$.

2.24. 1) Mostrar que $g(9, 5) = 4$.

2) Mostrar que $m(9, 5) \geqslant 5$.

2.25. Sea que existe un (n, k)-código con distancia de código d. ¿Es cierto que entonces hay un (n, k)-código con distancia de código $d - 1$?

§ 3. CODIFICACION ALFABETICA

Sea un alfabeto A, entonces, A^* es el conjunto de todas las palabras finitas en A, incluyendo la palabra vacía. La *longitud* (número de letras) de la palabra w se anota mediante $\lambda(w)$. La *palabra vacía* se connota por medio de Λ. La *unión de las palabras* w_1 y w_2, obtenida por la añadidura de la palabra w_2 a la derecha de la palabra w_1, se indica w_1w_2. La palabra w_1 se denomina *prefijo* de w_1w_2, y la palabra w_2, *sufijo* de w_1w_2. El prefijo w_1 (el sufijo w_2) de la palabra w_1w_2 se llama *propio*, si a un mismo tiempo $w_1 \neq \Lambda$ y $w_2 \neq \Lambda$. La palabra v se denomina *subpalabra de la palabra* w, si existen tales palabras u_1 y u_2, que $w = u_1vu_2$.

Sean, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un alfabeto de comunicación y B un alfabeto codificador. Sea φ la aplicación unívoca de las letras del alfabeto A en B^*. La codificación de las palabras en A, mediante la cual a cada palabra (comunicación) $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ se le coloca en correspondencia la palabra $\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_k})$, se denomina codificación *alfabética* (o *letra a letra*). La codificación alfabética se determina totalmente mediante la aplicación φ que la engendra, y se indica por K_φ. El conjunto $\{\varphi(a): a \in A\}$ se llama *código alfabético* y se designa por medio de $\varphi(A)$. La codificación alfabética K_φ y el código correspondiente $\varphi(A)$ se llaman *unívocamente decodificables*, o *separables*, si de cada igualdad del tipo

$$\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_k}) = \varphi(a_{j_1})\varphi(a_{j_2}) \ldots \varphi(a_{j_l})$$

entre las palabras en el alfabeto codificador B, se deduce que $l = k$ y $j_t = i_t$ $(t = \overline{1, k})$. El código $\varphi(A)$ se llama *prefijo*, si ninguna palabra de $\varphi(A)$ no resulta comienzo de alguna otra palabra de $\varphi(A)$. El código alfabético divisible $\varphi(A)$ se llama *completo*, si para cada palabra w en el alfabeto codificador B es justa la afirmación: o bien w es prefijo propio de alguna palabra de $\varphi(A)$, o bien alguna palabra de $\varphi(A)$ es prefijo (no es preciso que sea propio) de la palabra w.

Uno de los algoritmos de distinción de la divisibilidad de un código alfabético se reduce a lo siguiente. Sea $\varphi(A) = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código alfabético. Sean, S_1 el conjunto de los sufijos propios de las palabras en código, y S_2 el conjunto de todas las pala-

bras, cada una de las cuales es prefijo de alguna palabra codificada. Examinemos el multigrafo orientado G_φ, cuyos vértices son elementos del conjunto $S = (S_1 \cap S_2) \cup \{\Lambda\}$. Sean σ y τ, dos vértices de S, distintos. El arco que va desde σ hasta τ en el grafo G_φ existe si, y sólo si, existen la palabra en código w y la sucesión $P = w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}$ de palabras en código, tales que las palabras w y $\sigma w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_k} \tau$ sean iguales como las palabras en el alfabeto codificador. Además, si $\sigma \neq \Lambda$, entonces la sucesión P puede ser vacía. Al arco que va desde σ hasta τ, se le inscribe la palabra $w_{i_1} w_{i_2} \ldots$

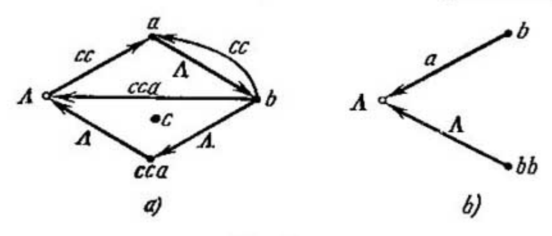


Fig. 22.

$\ldots, w_{i_k}$. En el multigrafo G_φ no hay bucles. El multigrafo G_φ se denomina *grafo del código alfabético* φ. Es justo el siguiente

TEOREMA 1 (A. A. Márkov). *El código φ es divisible si, y sólo si, en el grafo G_φ no existen circuitos que pasen por el vértice Λ.*

EJEMPLO 1. Sea $\varphi(A) = \{cc, cca, bcca, aa, ab\}$. Entonces, $S = \{\Lambda, c, cca, a, b\}$. El grafo G_φ se muestra en la fig. 22, *a*. En G_φ existe un circuito que pasa por los vértices Λ, a, b. Apuntando las palabras adjudicadas a los vértices y arcos de este circuito, hallamos una palabra que se decodifica de dos modos:

$$ccabcca = (cca)\,(bcca) = (cc)\,(ab)\,(cca).$$

EJEMPLO 2. Sea $\varphi(A) = \{a, ab, acbb, bb, bbacc\}$. Entonces $S = \{\Lambda, b, bb\}$. En el grafo G_φ, mostrado en la fig. 22, *b*, no hay circuitos que pasen por Λ. El código es divisible.

Sea que se tiene una fuente de comunicaciones, la que de un modo casual genera las letras del alfabeto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Se supone, que las apariciones de las letras del alfaboto A son estadísticamente independientes, y se someten a una distribución de probabilidades $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. A todo código alfabético binario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ se le puede cotejar el número

$$\mathcal{L}_C(P) = \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda(w_i),$$

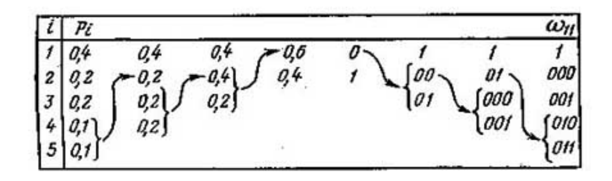
llamado *valor del código C para la distribución P*. El número $\mathcal{L}_C(P)$ es igual a la cantidad media de letras del alfabeto codificador, que tiene cada letra del alfabeto A. El código prefijo C_0 se llama *óptimo para la distribución P*, si $\mathcal{L}_{C_0}(P) = \inf_C \mathcal{L}_C(P)$, donde la cara inferior se toma por el conjunto de los códigos prefijos binarios, compuestos de m palabras.

El método de Haffman para la construcción de un código óptimo, se apoya en el teorema siguiente.

Teorema 2. *Si* $C = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ *es un código binario óptimo para la distribución* $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ *y* $p_j = q_1 + q_2$, *siendo* $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{j-1} \geqslant p_j \geqslant p_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant p_m \geqslant q_1 \geqslant q_2$, *entonces, el código* $C' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_m, w_j0, w_j1\}$ *resulta óptimo para la distribución*

$$P' = \{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_m, q_1, q_2\}.$$

El código C' se llamará *ampliación del código óptimo C*. El método de Haffman consiste en lo siguiente. Sea que en la nómina inicial de probabilidades en orden no creciente, las dos últimas probabilidades son p_{m-1} y p_m. Estas probabilidades se excluyen de la nómina, y su suma se inserta en el listado de tal modo, que en la nueva nómina obtenida las probabilidades no crezcan. Este procedimiento se repite hasta que se obtiene una lista de dos probabilidades. Después de obtenida esta nómina, a una de las probabilidades se le otorga el símbolo 0, y a la otra el 1 (el código óptimo para un alfabeto de comunicaciones de dos letras, para cualquier ley de distribución de las propabilidades). Luego, en correspondencia con el teorema, se construye el código óptimo para tres letras para la correspondiente nómina de probabilidades, y así sucesivamente hasta que no se obtiene el código óptimo para el listado inicial de probabilidades. El método de Haffman se ilustra con este ejemplo:



Para la distribución de probabilidades dada, existen también otros códigos óptimos, por ejemplo,

Tabla 6

i	p_i	w_i	w'_i
1	0,4	1	00
2	0,2	01	01
3	0,2	000	10
4	0,1	0010	110
5	0,1	0011	111

El método de Fano de construcción de códigos cercanos a los óptimos, consiste en lo siguiente. La nómina de probabilidades ordenadas en forma no creciente se divide en dos partes (consecutivas), de tal modo, que las sumas de las probabilidades que integran estas partes, se diferencien lo menos posible. A cada letra del alfabeto de comunicaciones, que corresponde a las probabilidades de la primera parte, se le confronta el símbolo 0 (ó 1), y a las letras restantes el símbolo 1 (respectivamente, el 0). Luego, se procede de igual modo con cada una de las partes, si ella contiene por lo menos dos probabilidades. El proceso continúa hasta que toda la lista no se divide en partes que contengan sólo una probabilidad. Ejemplos de códigos construidos por el método de Fano, se muestran en la tabla 6.

3.1. De acuerdo con el código alfabético $\varphi(A)$ dado, construir el grafo G_φ y aclarar si es un código divisible o no.

1) $\varphi(A)=\{ab, dc, a, bcadd, ca\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 5}\}$;

2) $\varphi(A)=\{ddac, dd, cddab, a, cddd, b\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 6}\}$;

3) $\varphi(A)=\{a, ab, acbb, abb, bbacc\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 5}\}$;

4) $\varphi(A)=\{abc, bbc, bcb, caa, acbb, cbcb, bccabb, abcacbbb\}$,

$A=\{i, i=\overline{1, 8}\}$;

5) $\varphi(A)=\{abc, abb, bcc, ccaa, bcabbbcc, bbccaabca, abcabbabbbcca\}$,

$A=\{i, i=\overline{1, 7}\}$;

6) $\varphi(A)=\{ab, bb, ca, cba, abb, bac, aabc, cabba\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 8}\}$.

3.2. Sea que los números 1, 2, 4, 17, 98 se codifican con sus descomposiciones binarias de la longitud mínima posible. Por ejemplo, el código de la unidad es 1, el código del dos es 10, el del cuatro es 100. ¿Es esta codificación divisible?

3.3. Por el código indivisible dado $\varphi(A)=\{aa, ab, cc, cca, bcca\}$ y por la palabra w en el alfabeto codificador $B=\{a, b, c\}$ aclarar si la palabra w es código de alguna comunicación. Si es así,

entonces dilucidar si la palabra w es código de exactamente una comunicación.

1) $w = ccabccabccabcc$;
2) $w = bccaccabccabccacabcca$;
3) $w = abbccaccabccaabab$.

3.4. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético y G_φ el grafo de este código. Sea luego que el grafo G'_φ es obtenido del G_φ el quitar todos los vértices que sean palabras en código. ¿Sigue siendo válido el teorema 1, si se reemplaza a G_φ por G'_φ?

3.5. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético y G_φ el grafo del mismo. Sea luego que el grafo G'_φ se obtuvo de G_φ mediante la eliminación de todos los arcos con la marca Λ, que llevan al vértice Λ. ¿Continúa teniendo valor el teorema 1, si reemplazamos a G_φ por G'_φ?

3.6. Para el código $\varphi(A)$ divisible dado, construir un código prefijo con la misma colección de las longitudes de las palabras en código.

1) $\varphi(A) = \{01, 10, 100, 111, 011\}$;
2) $\varphi(A) = \{1, 10, 00, 0100\}$;
3) $\varphi(A) = \{10, 101, 111, 1011\}$.

3.7. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético de potencia m, en el que la suma de las longitudes de las palabras en código es igual a N, y la longitud máxima de estas palabras, igual a l. Utilizando el teorema 1, demostrar que el código $\varphi(A)$ es divisible si, y sólo si, cada palabra que en el alfabeto codificador tiene una longitud no mayor que $(l-1)(N-m+1)$, o bien es código de exactamente una palabra, compuesta por las letras del alfabeto de comunicaciones A, o bien en general no es código de ninguna palabra de A^*.

3.8. Sean, k la menor y l la mayor de las longitudes de las palabras en código del código alfabético $\varphi(A)$, y N la suma de las longitudes de estas palabras. Mostrar, que para establecer la divisibilidad del código $\varphi(A)$ es suficiente probar la decodificación unívoca, no más que para Nl/k palabras en el alfabeto codificador.

3.9. Consideraremos que dos palabras w y v en el alfabeto $\{0, 1\}$ son *equivalentes*, si existe tal palabra u, que puede ser obtenida tanto de w como de v, con ayuda de las siguientes operaciones, empleadas en un número finito:

1) por tachadura de las subpalabras del tipo 10 y 1001;

b) intercalando en los espacios entre letras[1]), las palabras del tipo 10 y 1001.

¿Son o no son equivalentes los siguientes pares de palabras w y v:

1) $w = 1010101$, $v = 0101010$;
2) $w = 10010010$, $v = 010010010$;
3) $w = 11011010$, $v = 01101101$?

[1]) También se permite añadir las palabras 10 y 1001 a la derecha y a la izquierda de la palabra que se transforma.

3.10. Sea que M es un conjunto compuesto por m palabras no vacías en el alfabeto A, que tiene k letras. Mostrar que:

1) en M se hallara una palabra cuya longitud no es menor que $\log_k (1 + m (k - 1))$;

2) para todo $\varepsilon > 0$, la porción de aquellas palabras en M cuyas longitudes no resultan menores que $(1 - \varepsilon) \log_k (1 + m (k - 1))$, no supera a $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} m^{-\varepsilon}$, para $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

3.11. Sea que en el código alfabético binario C, de potencia $2^n + 1$, cada palabra en código tiene una longitud que no supera a n.

1) Demostrar que el código C no es prefijo.

2) ¿Puede ser divisible el código C?

3.12. Para las distribuciones de probabilidades de aparición de letras dadas, construir los códigos óptimos por el método de Haffman.

1) $P = (0,34; 0,18; 0,17; 0,16; 0,15)$;

2) $P = (0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06)$;

3) $P = (0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,02)$;

4) $P = (0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,05)$.

3.13. 1) Para las distribuciones de probabilidades del problema anterior, construir los códigos por el método de Fano.

2) Poner un ejemplo de una distribución de probabilidades, con la que el código, construido por el método de Fano, no es óptimo.

3.14. Sea $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código binario óptimo, que responde a la distribución $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$. Mostrar que:

1) $\lambda (w_i) \leqslant \lambda (w_j)$, si $p_i > p_j$.

2) El código C es completo.

3) Existen dos palabras en código de longitud $\lambda (w_m)$, que tienen prefijos iguales, de longitud $\lambda (w_m) - 1$.

3.15. Mostrar que si m no es exponente de dos, entonces con cualquier distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, en el código óptimo se encuentran dos palabras que tienen diferente longitud.

3.16. Apoyándose en los problemas 3.14 y 3.15, así como en la definición de código óptimo, explicar por que los códigos que a continuación se indican, no son óptimos con las distribuciones de probabilidades dadas.

1)

p_i	w_i
0,6	0
0,2	10
0,1	11
0,1	01

2)

p_i	w_i
0,6	1
0,2	01
0,15	001
0,05	0001

3)

p_i	w_i
0,2	000
0,2	001
0,2	010
0,2	011
0,2	100

3.17. Hallar el menor m y tal distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, para los que existen códigos óptimos, que se diferencian por las colecciones de longitudes de las palabras en código.

3.18. 1) Mostrar, que la longitud máxima de la palabra en código en un código óptimo de potencia m, no supera a $m - 1$.

2) Mostrar que para todo m entero ($m \geqslant 2$) se halla una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ que cumple la siguiente condición: existe un código óptimo que responde a la distribución P, tal que la longitud máxima de la palabra en código en él, es igual a $m - 1$.

3.19. Mostrar que no existen más de $\binom{2m-1}{m}$ prefijos completos de los códigos binarios de potencia m.

3.20. Un código se llama casi uniforme, si las longitudes de sus palabras en código no se diferencian en más de una unidad. Mostrar, que para todo m natural, un código casi uniforme es óptimo para la distribución $P = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$. ¿Es cierto lo contrario?

3.21. 1) Mostrar (por inducción con respecto a m), que la suma de las longitudes de las palabras en código del código óptimo con m comunicaciones, no supera a $\frac{1}{2}(m + 2).(m - 1)$.

2) Mostrar que para cada $m \geqslant 2$, entero, la evaluación indicada en el problema anterior, es alcanzable.

3.22. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$, caras arbitrarias del cubo B^n intersecadas de par en par, y de dimensiones $r_1, r_2, \ldots, r_m$, respectivamente.

1) Utilizando la evidente desigualdad $\sum_{i=1}^{m} 2^{r_i} \leqslant 2^n$, mostrar, que las longitudes $\lambda(w_1), \lambda(w_2), \ldots, \lambda(w_m)$ de las palabras del código prefijo binario arbitrario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, cumplen con la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} \leqslant 1$.

2) Mostrar que para el código prefijo completo, es justa la igualdad $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3) Mosrtar que si $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$, dondo λ_i son números naturales, $i = \overline{1, m}$, entonces existe un código prefijo con longitudes de palabras, iguales a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

3.23. 1) ¿Es cierto que en un código binario óptimo el número de palabras en código de longitud maximal es par?

2) ¿Es verdad que este número es exponente de 2?

3.24. Sea $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código binario prefijo completo, y sea que $\lambda(w_i) \geqslant \lambda(w_{i+1})$ para todo $i = \overline{1, m-1}$.

Mostrar que para $m \geqslant 2$, para todo $i = \overline{1, m-1}$, es justa la desigualdad $\lambda(w_{i+1}) - \lambda(w_i) \leqslant \log_2 m - 1$.

3.25*. Sea L_m el menor entero, para el que existe un código prefijo binario de potencia m y con una suma de longitudes de las palabras en código, L_m. Demostrar, que $L_m \geqslant m\,[\log_2 m]$, para $m \geqslant 2$.

3.26. Mosrtar que las longitudes de las palabras en código $\lambda(w_1)$, $\lambda(w_2), \ldots, \lambda(w_m)$, del código óptimo binario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, se somete a la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3.27. Sean $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, una distribución de probabilidades $(p_i > 0,\ i = \overline{1, m})$, y $\mathscr{L}(P) = \inf_C \mathscr{L}_C(P)$, donde la cota inferior se toma por todos códigos prefijos binarios de potencia m $(m \geqslant 3)$.

1) Mostrar que $\mathscr{L}(P) > 1$.

2) Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier entero $m \geqslant 1$, existe una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_m)$, tal, que $\mathscr{L}(P) < 1 + \varepsilon$.

El método de Shennón para la construcción de códigos cercanos al óptimo, consiste en lo siguiente.

Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geqslant p_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$, la distribución de probabilidades de aparición de las letras del alfabeto de comunicaciones $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Entonces, a la letra a_i se le confronta la palabra en código de longitud $l_i = \left]\log \frac{1}{p_i}\right[$, compuesta de las primeras (después de la coma) l_i cifras de la descomposición del número $q_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$ en la fracción binaria infinita (con insuficiencia).

Por ejemplo, si $P = (0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}3)$, entonces, el código de la letra a_1 es 00, el de la a_2 es 01, y el de la a_3, 10.

3.28. Construir, por el método de Shennón, los códigos para las distribuciones de probabilidades de los problemas 3.12, 1), 2).

3.29. Indicar el menor m, para el cual existe una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ tal, que el código construido por el método de Shennón para la distribución de probabilidades dada, no sea óptimo.

3.30. Demostrar que un código construido por el método de Shennón, es prefijo.

3.31. Sea $\mathscr{L}^*(m) = \sup_P \inf_C \mathscr{L}_C(P)$, donde la cota superior se toma por todas las distribuciones $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, tal que $p_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. 1) Demostrar que $\mathscr{L}^*(m) \geqslant [\log_2 m]$.
2) Demostrar que $\mathscr{L}^*(m) \leqslant [\log_2 m] + 1$.

Capítulo
VI

AUTOMATAS FINITOS

§ 1. FUNCIONES DETERMINADAS Y DE DETERMINACION ACOTADA

Sea A un alfabeto finito no vacío. Los elementos del mismo se llaman *letras* (o *símbolos*). Se llama *palabra en el alfabeto A* a la sucesión, compuesta de letras de A. La *longitud* (número de letras) en la palabra w se anota mediante $\lambda(w)$. El conjunto de todas las palabras $\widetilde{x}^s = x(1)\,x(2)\,\ldots\,x(s)$ de longitud s $(s \geqslant 1)$ en el alfabeto A suele indicarse por medio de A^s. La palabra de longitud 0 (*palabra vacía*) se connota con el símbolo Λ. Con A^* se indica el conjunto $\{\Lambda\} \cup \bigcup_{s \geqslant 1} A^s$, y por medio de A^ω el conjunto de todas las palabras $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\,\ldots$, donde $x(t) \in A$, $t = 1, 2, \ldots$ Las palabras de A^ω *se llaman palabras infinitas en el alfabeto A*.

La palabra w, que se obtiene con el agregado de la palabra w_2 a la derecha de la palabra finita (o vacía) w_1, se llama *unión de las palabras* w_1 y w_2 y se indica mediante $w_1 w_2$. Además, la w_1 se llama *comienzo* (*prefijo*) y la palabra w_2, *terminación* (*sufijo*) de la palabra w.

Sean A y B dos alfabetos finitos no vacíos. La aplicación φ: $A^\omega \to B^\omega$ se denomina *función determinada*, u *operador determinado* (abreviado: *d. función*, o *d. operador*), si cumple la siguiente condición: para todo $s \geqslant 1$, el s-ésimo símbolo $y(s)$ de la palabra $\widetilde{y}^\omega = \varphi(\widetilde{x}^\omega)$ es función unívoca de los primeros s símbolos $x(1), x(2), \ldots, x(s)$, de la palabra $\widetilde{x}^\omega$.

Si en las palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$ los prefijos de longitud s $(s \geqslant 1)$ coinciden, entonces también coinciden los prefijos de longitud s en las palabras $\widetilde{y}_1^\omega = \varphi(\widetilde{x}_1^\omega)$ e $\widetilde{y}_2^\omega = \varphi(\widetilde{x}_2^\omega)$.

Con $\Phi_{A,\,B}$ se indicará el conjunto de todas las funciones determinadas (f.d.) del tipo φ: $A^\omega \to B^\omega$.

Si $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, y $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, entonces, la aplicación $\varphi: A^\omega \to B^\omega$ induce m funciones $\varphi_i = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, cada una de las cuales depende de n variables, además, la variable X_j recorre el conjunto A_j^ω ($j = 1, 2, \ldots, n$). Estas funciones se definen así. Sea $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2) \ldots x(t) \ldots$, una palabra de A^ω e $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2) \ldots y(t) \ldots$ Entonces, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $x_j(t) \in A_j$, $\tilde{x}_j^\omega = x_j(1)\,x_j(2) \ldots x_j(t) \ldots$, $\tilde{x}^\omega = (\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega)$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))$, $y_i(t) \in B_i$, $\tilde{y}_i^\omega = y_i(1)\,y_i(2) \ldots y_i(t) \ldots$, $\tilde{y}^\omega = (\tilde{y}_1^\omega, \tilde{y}_2^\omega, \ldots, \tilde{y}_m^\omega)$, $\varphi_i(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega) = \tilde{y}_i^\omega$.

Se puede proceder a la inversa, a partir de las funciones φ_i, construir la aplicación φ.

El concepto de *función determinada de n argumentos*, surge de un modo natural al considerar las funciones determinadas del tipo $\varphi: (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$.

La variable X_1 de la función $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$ se llama *sustancial*, si es que se encuentran dos colecciones $(\tilde{x}_{11}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$ y $(\tilde{x}_{12}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$ de valores de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que se diferencian sólo por el primer elemento, y tales, que $\varphi(\tilde{x}_{11}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega) \neq \varphi(\tilde{x}_{12}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$. Si la variable X_1 no es sustancial, entonces se denomina *ficticia* (o *insustancial*). Análogamente se determinan la sustancialidad o la ficción de cualquier otra variable X_i, de la que dependa la función dada.

Se dice que la función $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *depende sustancialmente* (*insustancialmente*) de la variable X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), si esta variable es sustancial (respectivamente, ficticia) de la función φ.

Si A es el conjunto de todos los vectores de longitud n con elementos de E_k, y B el conjunto de todos los vectores de longitud m con elementos de E_l, entonces, en lugar de $\Phi_{A,B}$ se empleará la designación $\Phi_{k;\,l}^{n;\,m}$. Para $n = m = 1$, los superíndices se omitirán, indicando $\Phi_{k,\,l}$ en lugar de $\Phi_{k;\,l}^{1;\,1}$; si $k = l$, el subíndice será único: $\Phi_k^{n,\,m}$.

A veces resulta cómodo considerar que la f.d. φ de $\Phi_{A,\,B}$ *se realiza* por algún *mecanismo discreto* (*autómata*) $\mathfrak{A}_\varphi$ que trabaja en momentos discretos de tiempo $t = 1, 2, \ldots$ En la entrada de este mecanismo, en cada momento t se da una señal $x(t)$, y en la salida aparece la señal $y(t)$ (fig. 23). Las palabras $\tilde{x}^\omega$ se denominan *de entrada*, y las $\tilde{y}^\omega$, *de salida*; A es el *alfabeto de entrada* y B el *de salida del autómata* $\mathfrak{A}_\varphi$. Si $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, y $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, entonces, se puede considerar que el autómata $\mathfrak{A}_\varphi$ realiza m funciones determinadas, cada una de las cuales depende de n variables.

Cualesquiera dos funciones φ_1 y φ_2 de $\Phi_{A,\,B}$ se llaman *distintas*, si existe una palabra de entrada $\tilde{x}_0^\omega$, modificada por éstas en dife-

rentes palabras de salida, o sea, si $\varphi_1(\widetilde{x}_0^\omega) \neq \varphi_2(\widetilde{x}_0^\omega)$. Si la igualdad $\varphi_1(\widetilde{x}^\omega) = \varphi_2(\widetilde{x}^\omega)$ se cumple para toda palabra de entrada $\widetilde{x}^\omega$, entonces, φ_1 y φ_2 se denominan funciones determinadas *equivalentes* o *indistintas*.

Sean $\varphi \in \Phi_{A,B}$ y $\psi \in \Phi_{A,B}$. Si existe la palabra $\widetilde{x}_0^s \in A^*$, tal que $\varphi(\widetilde{x}_0^s\widetilde{x}^\omega) = \varphi(\widetilde{x}_0^s)\psi(\widetilde{x}^\omega)$ [1] para cualquier palabra $\widetilde{x}^\omega \in A^\omega$, entonces, el operador ψ se llama *operador residual del operador* φ *engendrado por la palabra* $\widetilde{x}_0^s$, y se lo indica mediante $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$. El conjunto $Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$ de todos los *operadores residuales* del operador φ, equivalentes al operador $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$, forma una *clase de equivalencia*, denominada *estado del operador* φ, *contenedor del operador residual* $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$. El estado

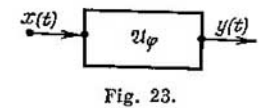


Fig. 23.

que contiene el operador φ se denomina *inicial*. Si $\psi \in Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$, entonces, diremos que el *operador* ψ *se realiza con el estado* $Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$ del operador φ. El operador φ se denomina *acotado-determinado* (abreviado: *o.a.-d.* o *f.a.-d.*, *función acotada-determinada*), si tiene un número finito de estados distintos de par en par. El número de los distintos estados de una f.a.-d. se llama *peso* de la misma. Si el conjunto de los distintos estados de par en par del operador φ es infinito, entonces, consideraremos que el peso del operador φ es ∞. Indiquemos con $\hat{\Phi}_{A,B}$ el conjunto de todas las funciones de $\Phi_{A,B}$, que son f.a.-d.

Al considerar las f.d. es cómodo utilizar la representación gráfica de las mismas en forma de *árboles informativos infinitos*. Sea A un alfabeto de n letras. Con D_A designamos al árbol radical orientado infinito, que cumple las condiciones:

(a) el semigrado de salida de cada vértice, incluida la raíz, es igual a n;

(b) el semigrado de escala de la raíz es igual a 0, y de todo otro vértice a 1;

(c) cada arco del árbol D_A tiene adjudicada alguna letra del alfabeto A, además, a distintos arcos que parten de un mismo vértice del árbol (en particular, de la raíz) se les atribuyen letras diferentes. La raíz del árbol se considerará como un *vértice de rango nulo*; si el vértice v es el extremo final de un arco que sale de un vértice de i-ésimo rango ($i \geqslant 0$), entonces, v se llama *vértice de* $(i+1)$*-ésimo*

[1]) Aquí, mediante $\varphi(\widetilde{x}_0^s)$ se indica el prefijo de longitud s de la palabra de entrada $\varphi(\widetilde{x}_0^s\widetilde{x}^\omega)$.

rango. *Arco de la j-ésima fila* ($j \geqslant 1$), se llama al que parte de un vértice de ($j - 1$)-*ésimo rango*. A toda cadena orientada infinita en el árbol D_A le corresponde una palabra de A^ω. En la fig. 24 se muestra un *fragmento del árbol* D_A, $A = \{0, 1\}$,compuesto de las tres primeras filas de este árbol (aquí y en adelante, supondremos que el símbolo 0 corresponde al arco izquierdo que parte del vértice, y el símbolo 1 al derecho); con arcos en negrita se destaca la cadena que corresponde a la palabra 101.

El *árbol cargado* $D_{A,\ B}$ se obtiene del árbol D_A, agregando a cada arco alguna palabra del alfabeto B. A toda cadena infinita orientada

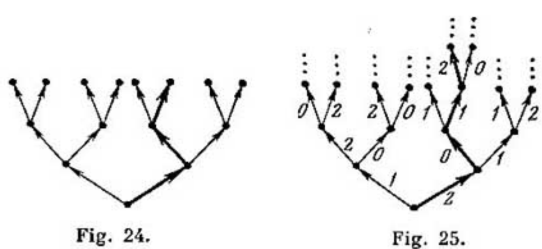


Fig. 24. Fig. 25.

en el árbol $D_{A,\ B}$ le corresponde una palabra de B^ω, compuesta por las letras adjudicadas a los arcos de esta cadena. Por eso, puede considerarse que el árbol cargado $D_{A,\ B}$ *da* (*realiza*) la aplicación φ: $A^\omega \to B^\omega$, que es una f.d. En la fig. 25 se muestra un fragmento de un árbol cargado $D_{A,\ B}$, donde $A = \{0,\ 1\}$ y $B = \{0,\ 1,\ 2\}$; la f.d. que corresponde a este árbol, modifica, por ejemplo, la palabra 1010, haciéndola 2012.

Sea que $D_{A,\ B}$ es un árbol cargado que realiza la f.d. φ. Al operador residual $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$ ($s \geqslant 0$) del operador φ, le corresponde el subárbol $D_{A,\ B}(\tilde{x}_0^s)$, que crece a partir de un vértice $v(\tilde{x}_0^s)$ de s-ésimo rango, en el que concluye la cadena que parte de la raiz y contiene exactamente s arcos; además, a esta cadena en la i-ésima fila le corresponde el arco marcado con la letra $x_0(i) \in A$.

Si los operadores residuales $\varphi_{\tilde{x}_1^{s_1}}$ y $\varphi_{\tilde{x}_2^{s_2}}$ son equivalentes, entonces, los vértices que les corresponden $v(\tilde{x}_1^{s_1})$ y $v(\tilde{x}_2^{s_2})$ y los subárboles que parten de estos vértices también se llaman *equivalentes*. El peso del árbol, realizado por la f.d., es igual al peso de esta función, y, en consecuencia, al número máximo de vértices (o subárboles) no equivalentes de par en par del árbol dado.

1.1. Aclarar, si es f.d. o no la aplicación φ: $\{0,\ 1\}^\omega \to \{0,\ 1\}^\omega$:

1) $\varphi(x(1)\,x(2)\ \ldots) = x(2)\,x(3)\ \ldots$, o sea $y(t) = x(t + 1)$, $t \geqslant 1$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = 10100100010\ldots010\underbrace{\ldots010}_{n\text{ veces}}$ para cualquier palabra de entrada $\tilde{x}^\omega$;

3) $\varphi(x(1)\,x(2)\,x(3)\ldots) = x(1)\,x(2)\,x(1)\,x(2)\,x(3)\ldots$, o sea, $y(1) = x(1)$, $y(2) = x(2)$ e $y(t) = x(t-2)$ para $t \geqslant 3$;

4) $\varphi(x(1)\,x(2)\ldots) = 0\,x(1 + x(2))\,x(1 + x(3))\ldots$, o sea, $y(1) = 0$, $y(t) = x(1 + x(t))$ para $t \geqslant 2$.

1.2. ¿Es o no una función determinada la φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$, dada mediante la siguiente descripción verbal?

1) La palabra $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots$ se transforma en la palabra $\tilde{0}^\omega = 000\ldots0\ldots$, si existe tal t, que $x(t) = 0$; en el caso contrario $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \tilde{1}^\omega = 111\ldots1\ldots$

2) La s-ésima letra $y(s)$ en la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es igual a 0, si para algún $t \leqslant s$ se cumple la desigualdad $x(t) < x(t+1) + x(t+2)$; en el caso contrario, $y(s) = 1$.

3) La s-ésima letra $y(s)$ en la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es igual a 0, si existe un $t \geqslant s$ tal, que $x(t) \leqslant x(s)$; en el caso contrario, $y(s) = 1$.

4) $y(1) = 0$ y para $s \geqslant 2$ el número de ceros en el prefijo $y(1) \times y(2)\ldots y(s)$ de la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es en una unidad mayor que el número de ceros en la palabra $x(2)\,x(3)\ldots x(s)$.

A cada palabra $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ de $\{0, 1\}^\omega$, le corresponde algún número $\nu(\tilde{x}^\omega)$ del segmento $[0, 1]$, cuya descomposición binaria tiene la forma $0, x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ Si $a \in [0, 1]$, entonces, su descomposición binaria[1]) $0, a_1 a_2 \ldots a_t \ldots$ genera la palabra $\langle a\rangle = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$, donde $x(t) = a_t$ $(t \geqslant 1)$.

1.3. Aclarar si es o no f.d. la $\varphi: \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$; 4) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{3} \right\rangle$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{7}{15} \right\rangle$; 5) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \langle 1 - \nu(\tilde{x}^\omega)\rangle$.

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{2} \right\rangle$;

1.4. Es o no función determinada la $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$: $\underbrace{\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \times \ldots \times \{0, 1\}^\omega}_{n\text{ veces}} \to \{0, 1\}^\omega$?

$$1)\ \varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega) = \begin{cases} \tilde{1}^\omega, & \text{si } \nu(\tilde{x}_1^\omega) \leqslant \nu(\tilde{x}_2^\omega), \\ \tilde{0}^\omega & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

---

[1]) Si $a = p/2^n$ $(n \geqslant 1)$, entonces, se considera una descomposición binaria tal, que contenga una infinita cantidad de ceros.

2) $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega) = \begin{cases} \widetilde{x}_1^\omega, \text{ si } \nu(\widetilde{x}_1^\omega)\nu(\widetilde{x}_2^\omega) \leqslant 1/2 \\ \widetilde{x}_2^\omega \text{ en caso contrario;} \end{cases}$

3) $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \widetilde{x}_3^\omega) = \begin{cases} \widetilde{1}^\omega, \text{ si } \nu(\widetilde{x}_1^\omega) + \nu(\widetilde{x}_2^\omega) \leqslant \nu(\widetilde{x}_3^\omega), \\ \widetilde{x}_3^\omega \text{ en caso contrario;} \end{cases}$

4) $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \widetilde{x}_3^\omega) = \begin{cases} \langle \nu(\widetilde{x}_1^\omega)\nu(\widetilde{x}_2^\omega)\rangle, \text{ si } \nu(\widetilde{x}_3^\omega) = 1, \\ \widetilde{0}^\omega \text{ en caso contrario.} \end{cases}$

1.5. Las funciones parciales indicadas más abajo φ: $\{0, 1\}^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ no están determinadas solamente en la palabra $\widetilde{0}^\omega = 00\ldots0\ldots$ Aclarar, cuáles de estas funciones se pueden predefinir hasta la determinación, y cuales no.

1) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = \begin{cases} \widetilde{x}^\omega, \text{ si en cada prefijo de la palabra} \\ \quad \widetilde{x}^\omega \text{ el número de ceros no es menor} \\ \quad \text{que el de unidades,} \\ \widetilde{1}^\omega \text{ en caso contrario;} \end{cases}$

2) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } \exists s\,((s \leqslant t)\,\&\,(x(s) = 1)), \\ 1 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

3) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 1, \text{ si para algún } s \leqslant t \text{ en el prefijo } x(1)\,x(2)\ldots x(s) \\ \quad \text{el número de ceros es mayor que el de unidades,} \\ \quad x(t) \text{ en el caso contrario.} \end{cases}$$

4) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } \nu(x(1)\,x(2)\ldots x(t)\,00\ldots0\ldots) \leqslant 1/2, \\ 0, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

1.6. 1) Refutar la siguiente afirmación: si la función $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ depende sustancialmente da la variable X_1 y para toda palabra (fijada) $\widetilde{x}_2^\omega \in \{0, 1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \widetilde{x}_2^\omega)$ es una f.d., entonces, la propia función $\varphi(X_1, X_2)$ es determinada.

2*) Sea que la función $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ cumple la condición: cualesquiera que sean las palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$ de $\{0, 1\}^\omega$, las funciones $\varphi(X_1, \widetilde{x}_2^\omega)$ y $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega, X_2)$ son determinadas. ¿Resulta entonces determinada la función $\varphi(X_1, X_2)$?

1.7. Para la función $\widetilde{y}^\omega = \varphi(\widetilde{x}^\omega)$, que pertenece al conjunto Φ_2, construir un fragmento de un grafo cargado, contenedor de las s primeras filas.

1) $y(1) = 1$ e $y(t) = x(t-1)$, para $t \geqslant 2$, $s = 3$;
2) $y(1) = 0$ e $y(t) = x(t) \oplus y(t-1)$, para $t \geqslant 2$, $s = 4$;

3) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = \left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$, $s = 3$;

4) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = \left\langle \frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{4} \right\rangle$, $s = 4$.

1.8. De acuerdo con la función $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) \in \Phi_2$ dada, representar en el árbol cargado una cadena que corresponda al prefijo $\widetilde{x}^{s}$ de la palabra de entrada $\widetilde{x}^{\omega}$, y escribir el prefijo $\widetilde{y}^{s}$ de la palabra de salida $\widetilde{y}^{\omega}$.

1) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = 10100100010\ \ldots$ (o sea, $y(t) = 1$ sólo para

$$t = \binom{i}{2},\ i = 2,\ 3,\ \ldots \Big),\ \widetilde{x}^{7} = 0101001;$$

2) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = \left\langle \frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{2} \right\rangle$, (a) $\widetilde{x}^{7} = 1111101$, (b) $\widetilde{x}^{7} = 1010110$;

3) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x(1) + x(2) + \ldots + x(t) > t/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$

(a) $\widetilde{x}^{10} = 0101010110$, (b) $= \widetilde{x}^{10} = 1100101110$.

1.9. El árbol cargado que corresponde a alguna función $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) \in \in \Phi_2$, tiene la siguiente forma: al arco izquierdo que parte de la raíz se le adjudica el 0, al derecho, el 1; si v es un vértice de i-ésimo rango ($i \geqslant 1$) y al arco de la i-ésima fila que hace escala en el vértice v se le otorga el símbolo $\sigma \in \{0, 1\}$, entonces, al arco izquierdo que parte de v se lo connota con el mismo símbolo σ, y al arco derecho con el símbolo $\bar{\sigma}$ (que es negación de σ).

1) ¿Es cierto, que para esta función la s-ésima letra de la palabra de salida $\widetilde{y}^{\omega} = \varphi(\widetilde{x}^{\omega})$ es hallada a partir de la relación:

(a) $y(1) = x(1)$, $y(s) = x(s-1) \oplus x(s)$ para $s \geqslant 2$;
(b) $y(1) = x(1)$, $y(2) = x(1) \oplus x(2)$, $y(s) = x(s-2) \oplus \oplus x(s)$, para $s \geqslant 3$;
(c) $y(s) = x(1) \oplus x(2) \oplus \ldots \oplus x(s)$?

2) Hallar el peso de la función φ.

1.10. ¿Son equivalentes los operadores residuales $\varphi_{\widetilde{x}_0^{s}}$ y $\varphi_{\widetilde{x}_1^{r}}$ de la función determinada $\varphi \in \Phi$?

1) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = 10100100010\ \ldots \Big($o sea, $y(t) = 1$, sólo para $t = \binom{i}{2}$, $i = 2,\ 3,\ \ldots \Big)$, $\widetilde{x}_0^{3} = 101$, $\widetilde{x}_1^{3} = 010$;

2) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = \left\langle \frac{8}{15} \right\rangle$, $\widetilde{x}_0^{2} = 10$, $\widetilde{x}_1^{5} = 00101$;

3) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = \left\langle \frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{2} \right\rangle$, $\widetilde{x}_0^{1} = 1$, $\widetilde{x}_1^{3} = 001$,

4) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\, y(2)\ \ldots$ o

$$y(t)=\begin{cases}0, & \text{si } x(1)+x(2)+\ldots+x(t)<t/2\\ 1, & \text{en caso contrario,}\end{cases}$$

$$\widetilde{x}_0^2=10,\ \widetilde{x}_1^6=010110.$$

1.11. Aclarar si φ_1 es operador residual de la función $\varphi\in\Phi_2$.

1) $\varphi: \begin{cases} y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\oplus\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2\end{cases}$

$\varphi_1: \begin{cases} y(1)=1,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

2) $\varphi: \begin{cases} y(1)=1,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2,\end{cases}$

$\varphi_1: \begin{cases} y(1)=0,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

3) $\varphi: \begin{cases} y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\cdot\bar{x}(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot x(t-1),\ t\geqslant 2,\end{cases}$

$\varphi_1: \begin{cases} y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\oplus y(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

4) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{13}{15}\right\rangle,\ \varphi_1(\widetilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{7}{15}\right\rangle.$

1.12 Aclarar si la función $\varphi\in\Phi_2^{n,m}$ es a.-d. función y hallar su peso.

1) $\varphi(\widetilde{x}^\omega): \begin{cases} y(1)=y(2)=1,\\ y(t)=x(t-2),\ t\geqslant 3;\end{cases}$

2) $\varphi(\widetilde{x}^\omega): \begin{cases} y(2t)=x(t+1),\ t\geqslant 1;\\ y(2t-1)=\bar{x}(t),\ t\geqslant 1;\end{cases}$

3) $\varphi(\widetilde{x}^\omega): \begin{cases} y(1)=1,\\ y(2t-1)=x(2t-1)\oplus y(2t-3),\ t\geqslant 2,\\ y(2t)=x(2t-1),\ t\geqslant 1;\end{cases}$

4) $\varphi(\widetilde{x}^\omega): \begin{cases} y_1(1)=x_1(1)\oplus x_2(1),\\ y_1(t)=x_1(t)\oplus x_2(t)\oplus y_2(t-1),\ t\geqslant 2,\\ y_2(1)=x_1(1)\cdot x_2(1),\\ y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)\oplus x_1(t)\cdot y_2(t-1)\oplus\\ \qquad\oplus x_2(t)\cdot y_2(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

5) $\varphi(\widetilde{x}^\omega): \begin{cases} y_1(1)=1,\\ y_1(t)=\bar{y}_2(t-1),\ t\geqslant 2,\\ y_2(1)=0,\\ y_2(t)=y_1(t-1),\ t\geqslant 2.\end{cases}$

1.13. Sea $D_{A,\,B}$ un árbol cargado que realiza la a.-d. función $\varphi: A^\omega \to B^\omega$. Cada vértice del árbol $D_{A,\,B}$ lo indicamos con un número igual al peso del subárbol que crece a partir del mismo. Obtenemos un nuevo árbol $\overline{D}_{A,\,B}$.

1) Para todo $r \geqslant 1$ poner un ejemplo de a.-d. función φ tal, que cada vértice en el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, correspondiente a la función φ, esté marcado con el número r.

2) Para todo $r \geqslant 2$ poner un ejemplo de a.-d. función φ tal, que para $j = 0, 1, \ldots, r-1$, cada vértice de j-ésimo rango en el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, correspondiente a la función φ, esté marcado con el número $r-j$.

1.14. 1) Demostrar que el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, construido de acuerdo con las condiciones del problema 1.13, posee la siguiente propiedad: la sucesión de números $\nu(v_1), \nu(v_2), \ldots$, atribuidos a los vértices de la cadena orientada $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \ldots$ (finita o infinita), es monótona no creciente y, en el caso de una cadena infinita, esta sucesión se estabiliza.

2) Mostrar que cualquier operador residual de la función $\varphi \in \Phi_{A,\,B}$ tiene un peso no superior al de la función φ.

1.15. El árbol que realiza la función $\varphi_0(\tilde{x}^\omega) \in \Phi_2$, tiene la siguiente forma: el símbolo **1** se le asigna solamente a aquellos arcos que pertenecen a la cedena orientada que parte de la raíz y que corresponde a la palabra de entrada 10100100010 . . . (aquí $x(t) = 1$ únicamente para $t = \binom{i}{2}$, $i = 2, 3, \ldots$); a los restantes arcos se les otorga el símbolo 0. Demostrar que la función φ_0 tiene peso infinito y, por consiguiente, no es acotada-determinada.

1.16. Para cada $r \geqslant 2$ construir un ejemplo de a.-d. función tal, de peso r, que satisfaga la condición: en el árbol cargado que realice esta función, el símbolo **1** se le inscribe solamente a los arcos de cierta cadena orientada infinita Z, que parte de la raíz; a los restantes arcos (que no pertenecen a la cadena Z), se les asigna el símbolo 0.

La palabra $\tilde{x}^\omega \in A^\omega$ se llama *casiperiódica*, si es que existen tales números enteros n_0 y T, que $n_0 \geqslant 1$, $T \geqslant 1$, y $x(n+T) = x(n)$ para $n \geqslant n_0$. Además, el prefijo $x(1)\, x(2) \ldots x(n_0 - 1)$ de la palabra $\tilde{x}^\omega$ se llama *preperíodo*; el número $n_0 - 1$, *longitud del preperíodo*; la palabra $x(n_0)\, x(n_0+1) \ldots x(n_0+T-1)$, *período de la palabra* $\tilde{x}^\omega$; y el número T, *longitud del período*. Es cómodo escribir una palabra casiperiódica así de la forma $x(1)\, x(2) \ldots x(n_0-1) \times \times [x(n_0+1) \ldots x(n_0+T-1)]^\omega$.

1.17. 1) Demostrar que si la función $\varphi \in \hat{\Phi}_{A,\,B}$, entonces, toda palabra casiperiódica de A^ω se transforma con la función φ en una palabra casiperiódica de B^ω.

2) Mostrar sin salir de los límites del conjunto Φ_2, que la afirmación contraria a la formulada en 1), no es correcta.

INDICACION: Véase el problema 1.15.

1.18. Refutar la siguiente afirmación: si la función determinada $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ depende sustancialmente de la variable X_1 y para toda palabra (fijada) $\widetilde{x}_2^\omega \in \{0, 1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \widetilde{x}_2^\omega)$ es a.-d. función, entonces la función $\varphi(X_1, X_2)$ también es acotada-determinada.

1.19. Sea que todos los vértices de un árbol cargado están divididos del modo corriente en clases de equivalencia. Demostrar que cualquiera que sea la clase de equivalencia, en ella existe algún vértice v que cumple la condición: todos los vértices en la cadena orientada que parte de la raíz del árbol y termina en el vértice v, son no equivalentes de par en par.

1.20. 1) Demostrar que para cada vértice de un árbol cargado que tiene peso r, existe otro vértice equivalente al mismo de rango no mayor que $r-1$.

2) ¿Se puede reemplazar en el problema anterior a $r-1$ por $r-2$, si $r \geqslant 2$?

Sean $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, funciones del tipo $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}} \to E_l$, donde k y l no son menores de 2. El operador $\varphi_{f_1, f_2, \ldots, f_m}$ de $\Phi_{k, l}^{n, m}$ se llama *operador engendrado por las funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, si para todo $t \geqslant 1$

$$y_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

1.21. Mostrar que un operador de $\Phi_{k, l}^{n, 1}$ es engendrado (por alguna función del tipo $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}} \to E_l$) si, y sólo si, su peso es igual a 2.

1.22. Aclarar si es o no engendrado el operador $\varphi \in \Phi_2^{1, 2}$, dado por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &y_1(1) = 0, \\ &y_1(t) = x(t-1) \oplus y_2(t-1),\ t \geqslant 2, \\ &y_2(t) = x(t). \end{aligned}$$

1.23. El operador parcial φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ está dado solamente en las palabras de entrada $\widetilde{0}^\omega$ y $\widetilde{1}^\omega$. Predefinirlo de tal modo, que se obtenga un operador con el peso mínimo posible.

1) $\varphi(\widetilde{0}^\omega) = 0101\ [100]^\omega$, $\varphi(\widetilde{1}^\omega) = 11\ [10]^\omega$;

2) $\varphi(\widetilde{0}^\omega) = 01\ [011]^\omega$, $\varphi(\widetilde{1}^\omega) = 1010010001000010\ \ldots$ (o sea, $y(t) = 1$, solamente para $t = \binom{i}{2}$, $i = 2, 3, \ldots$).

1.24. 1) Demostrar que si $|A| > 1$ y $|B| > 1$, entonces, la potencia del conjunto $\Phi_{A, B}$ es igual a c (potencia de continuo).

2) Hallar la potencia del conjunto $\Phi_{A, B}$ en aquellos casos en que, bien $|A| = 1$, o bien $|B| = 1$.

1.25. Las palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$ de A^ω se llaman *s-equivalentes* (se indica: $\widetilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \widetilde{x}_2^\omega$), si son iguales sus prefijos de longitud s ($s \geqslant 1$). La relación $\underset{s}{\sim}$ es relación de equivalencia y parte al conjunto A^ω en clases $K_j(s)$ de palabras s-equivalentes.

1) ¿Cuál es la potencia de cada clase $K_j(s)$ (s es un número fijado)?

2) ¿Cuántas clases $K_j(s)$ distintas existen (para un s dado)?

3) ¿Cuántas clases distintas $K_{jl}(s+l)$ existen en cada clase $K_j(s)$ (aquí $l \geqslant 1$)?

4) Demostrar que la aplicación φ: $A^\omega \to B^\omega$ es función determinada si, y sólo si, para todo $s \geqslant 1$ y cualesquiera palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$, pertenecientes al conjunto A^ω, la relación $\widetilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \widetilde{x}_2^\omega$ lleva a la relación $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega) \underset{s}{\sim} \varphi(\widetilde{x}_2^\omega)$.

1.26. 1) Demostrar que si $|B| \geqslant 2$, entonces, el conjunto $\hat{\Phi}_{A,B}$ es numerable-infinito.

2) ¿A qué es igual la potencia del conjunto $\hat{\Phi}_{A,B}$, si $|B| = 1$?

1.27. Sea un árbol cargado $D_{A,B}$, que realiza la a.-d. función φ: $A^\omega \to B^\omega$ de peso r. Cambiamos el símbolo de salida y algún arco de la j-ésima fila del árbol $D_{A,B}$ (consideramos que $|B| \geqslant 2$). Obtenemos el árbol $D'_{A,B}$, que realiza alguna (nueva) a.-d. función φ' de peso r'.

1) Mostrar, que $1 \leqslant r' \leqslant r + j$.

2) Poner un ejemplo de una a.-d. función φ tal, que en ella se alcanza la evaluación superior, o sea, $r' = r + j$.

§ 2. REPRESENTACION DE FUNCIONES DETERMINADAS CON DIAGRAMAS DE MOORE, CON ECUACIONES CANONICAS, CON TABLAS Y CON ESQUEMAS. OPERACIONES SOBRE FUNCIONES DETERMINADAS

Sea $Q = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{w-1}\}$, el conjunto de todos los estados de la función φ de $\hat{\Phi}_{A,B}$. Cotejamos el orgrafo Γ_φ a la función φ:

1) El conjunto de los vértices del orgrafo Γ_φ es el conjunto $E_w = \{0, 1, \ldots, w-1\}$, además, se considera que el vértice j corresponde al estado Q_j;

2) Si $\varphi^{(i)}$ y $\varphi^{(j)}$ son operadores residuales de la función φ, realizados respectivamente por los estados Q_i y Q_j (además, $\varphi^{(j)}$ es también operador residual del operador $\varphi^{(i)}$, que corresponde al prefijo $\widetilde{x}^1 = a$, y $\varphi^{(i)}(a\widetilde{x}^\omega) = b\varphi^{(j)}(\widetilde{x}^\omega)$), entonces en el orgrafo Γ_φ se tiene un arco (i, j), y a éste se le otorga la expresión $a\,(b)$;

3) el arco (i, j) existe en Γ_φ sólo si se cumplen las condiciones del punto 2).

El vértice de Γ_φ que existe en el estado inicial de la función φ, habitualmente se marca con un asterisco. Supongamos que desde el vértice i al j van m arcos, a quienes se les atribuye las expresiones $a_1(b)_1$, $a_2(b_2)$, . . ., $a_m(b_m)$ (aquí necesariamente $a_p \neq a_q$, para $p \neq q$, pero algunos o todos los símbolos b_s pueden coincidir entre sí); entonces uniremos i con j solamente mediante un arco (i, j) y le otorgaremos todas las expresiones $a_p(b_p)$, $p = \overline{1, m}$. El orgrafo Γ_φ se llama *diagrama de Moore de la función* φ. Con Γ_φ se pueden enlazar dos funciones:

a) $F: A \times Q \to B$, es la *función de las salidas*,

b) $G: A \times Q \to Q$, es la *función de paso* (de transición).

Las funciones F y G de Γ_φ se definen así: por el par (a, j) hallamos el vértice j y un arco tal, que partiendo de j, le es asignado el símbolo de entrada a (sea que este arco tiene la forma (j, r)); el valor de la función F en el par (a, j) es el símbolo de salida otorgado al arco (j, r) y que se encuentra entre paréntesis en forma de símbolo a; el valor de la función G en el par (a, j) coincide con r, o sea, es igual al «número» de un estado tal, que «es terminación» del arco (j, r).

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y(t) = F(x(t), q(t-1)), \\ q(t) = G(x(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_0, \end{cases} \qquad (1)$$

donde $x(t) \in A$, $y(t) \in B$, $q(t) \in Q$, $(t = 1, 2, \ldots)$ y $q_0 \in Q$, se denomina: *ecuaciones canónicas del operador* φ *con condición inicial* q_0.

Con ayuda del diagrama de Moore y de las ecuaciones canónicas se pueden formular tales operadores determinados, que no resultan ser acotados-determinados. El conjunto de los vértices del orgrafo Γ_φ que corresponde a un operador determinado así, coincide con la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Si φ es un operador acotado-determinado, entonces las funciones $F(x(t), q(t-1))$ y $G(x(t), q(t-1))$ (véase el sistema (1)) y los argumentos de los que dependen estas funciones, toman un número finito de valores; por eso es posible la formulación tabulada del a.-d. operador φ con ayuda de la llamada *tabla canónica*:

Tabla 7

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
a	j	$F(a, j)$	$G(a, j)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

En lugar de las ecuaciones canónicas (1) resulta cómodo considerar tales ecuaciones canónicas, en las que las funciones de salidas y de transiciones son funciones de la lógica k-valente P_k ($k \geqslant 2$). Para la obtención de la correspondiente representación del operador φ los alfabetos A, B y Q se codifican con vectores, cuyas coordenadas pertenecen al conjunto E_k ($k \geqslant 2$). Si φ es un operador acotado-determinado y $n =]\log_k |A|[$, $m =]\log_k |B|[$, $r =]\log_k |Q|[$, entonces, para la codificación de las letras de los alfabetos A, B, y Q es suficiente con tomar vectores (con coordenadas pertenecientes a E_k), que tengan dimensiones n, m y r, respectivamente[1]). Entonces el sistema (1) se transforma en el siguiente:

$$\begin{cases} y_1(t) = F_1(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m(t) = F_m(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ q_1(t) = G_1(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_r(t) = G_r(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ q_1(0) = q_{01}, \ \ldots, \ q_r(0) = q_{0r}. \end{cases} \quad (2)$$

En adelante, se utiliza también la «escritura vectorial» de los sistemas análogos al (2). Con esta escritura el sistema (2) tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(m)}(t) = \boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t), \ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(t) = \boldsymbol{G}^{(r)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t), \ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(0) - \boldsymbol{q}_0^{(r)}r. \end{cases} \quad (3)$$

Las funciones F_i y G_l en el sistema (2) son, hablando en general, *parciales*, o sea, no determinadas en todas partes. Habitualmente a ellas las predeterminan de tal modo, que los segundos miembros de las ecuaciones en (2) tengan la forma más simple posible.

La tabla canónica que expresa al a.-d. operador φ, correspondiente al sistema (2), tiene $m + n + 2r$ columnas y k^{n+r} filas.

Las ecuaciones del sistema (2) se denominan *ecuaciones canónicas en forma escalar*, y las del sistema (1), *ecuaciones canónicas en forma vectorial*.

Puede considerarse que el sistema (2) determina el operador del conjunto $\Phi_k^{n,\, m}$.

Sea que el operador determinado φ está dado por el sistema (2), y que cada una de sus funciones F_i y G_l son funciones de la lógica k-valente P_k ($k \geqslant 2$), siempre determinadas en todas partes. Consideraremos al operador φ como si fuese un elemento del conjunto $\Phi_k^{n,\, m}$. El esquema Σ_φ del operador φ se define del siguiente modo: Σ_φ representa una red, cuyos polos están indicados con los símbolos de las variables de entrada y de salida, y a algunos vértices que no

---

[1]) Si el operador determinado φ no es acotado-determinado, entonces $r = \infty$.

son polos, se les inscriben los símbolos de ciertos operadores determinados (del conjunto $\bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{s'=1}^{\infty} \Phi_k^{s,s'}$). Al esquema del operador φ de $\Phi_k^{n,m}$ lo expresaremos en forma de rectángulo (fig. 26), con n canales *de entrada* y m *de salida*. Los canales de entrada se dibujan en forma de flechas que parten de los polos de entrada, y los canales de salida se representan como flechas que llegan a los polos de salida. Los polos se indican en forma de pequeños círculos. Si $m = 1$, entonces al esquema Σ_φ del operador φ a veces lo dibujaremos como un triángulo (fig. 27) con n polos de entrada y uno de salida.

Consideramos que en cada momento $t = 1, 2, \ldots$ en la i-ésima entrada x_i *«ingresa»* el símbolo de entrada $x_i(t) \in E_k$, y en la j-ésima

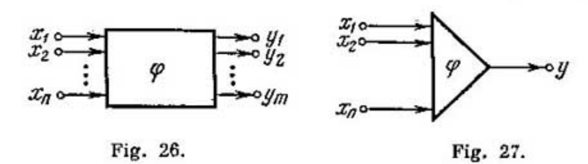


Fig. 26. Fig. 27.

salida y_j *«resulta»* (*se realiza*) el valor $y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$. Se dice que la *salida* y_j *depende con retardo de la entrada* x_i, si la función $F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ no depende sustancialmente de la variable $x_i(t)$.

El concepto de dependencia con retardo puede formularse de otro modo. Consideremos, por ejemplo, el caso de una función determinada del tipo $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ y definimos la dependencia con retardo con respecto a la variable X_1. La función φ *depende con retardo de* X_1, si para cualesquiera palabras de entrada $\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega$ ($\tilde{x}_j^\omega \in A_j^\omega$, $j = \overline{1, n}$), la s-ésima letra de la palabra de salida $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega)$ se determina unívocamente con los primeros s símbolos de las palabras $\tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega$ y con los $s - 1$ primeros símbolos de la palabra $\tilde{x}_1^\omega$.

Sea la función determinada φ dada por el sistema (2) y Σ_φ el esquema de esta función. Definimos tres operaciones sobre φ y sobre Σ_φ.

1) *Operación* O_1, *de identificación de un número de dos o más variables de entrada* en la función φ e *identificación en el esquema* Σ_φ *de los polos de entrada* correspondientes a estas variables. Los polos identificados se consideran como un polo de un nuevo esquema. En la fig. 28 se muestra el esquema $\Sigma_{\varphi'}$, obtenido de Σ_φ mediante la identificación de los polos x_1 y x_2.

2) *Operación* O_2, *de extracción de alguna variable de salida* y_j de la función φ (lo que es equivalente a quitar del sistema (2) la ecuación $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$) y *de eliminación del esquema* Σ_φ *del canal de salida y del polo*, correspondientes a la variable de sa-

lida y_j (véase la fig. 29, en la que se representa el esquema Σ_ψ, obtenido de Σ_φ después de haber sido extraídos el canal de salida y el polo y_1).

OBSERVACIÓN. Si $m = 1$, entonces, al eliminar la variable y_1 (la única variable de salida), se obtiene un *autómata sin salida*.

3) *Operación O_3, de introducción de la retroacción* para una variable de entrada y otra de salida. Sea que en calidad de variable

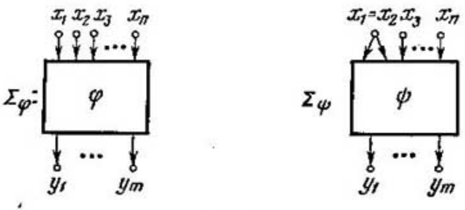


Fig. 28.

de entrada se toma x_i y como variable de salida, y_j. La operación O_3 se puede emplear (a la función φ en el esquema Σ_φ) sólo en el caso cuando la salida y_j depende con retardo de la entrada x_i. Las ecua-

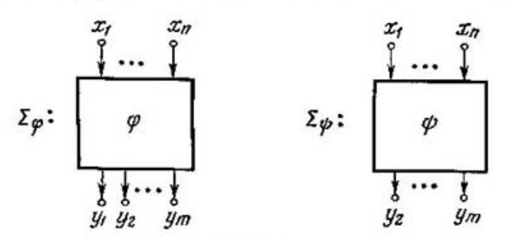


Fig. 29.

ciones canónicas para la nueva función ψ se obtienen mediante la exclusión de la ecuación $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ del sistema (2), y por el reemplazo de la variable $x_i(t)$ en cada función F_q $(q \neq j)$ y G_l, por la función $F'_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots$ $\ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$, obtenida de la función $F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ quitando la variable no sustancial $x_i(t)$. Las condiciones iniciales no varían. El esquema Σ_ψ se obtiene del Σ_φ como resultado de la identificación de la salida y_j con la entrada x_i; además, los polos identificados se declaran vértices interiores del esquema Σ_ψ. En la fig. 30 se muestra el esquema Σ_ψ, obtenido del Σ_φ mediante la introducción de la retroacción por las variables x_1 e y_1.

Observación 1. Si $n = 1$, entonces, al introducir la retroacción por la variable x_1 (y cualquier variable de salida), obtenemos un *autómata sin entrada.*

Observación 2. Empleando las operaciones arriba enumeradas, es cómodo indicar entre paréntesis (como designaciones de estas operaciones) aquellos canales (polos y variables), con respecto a los

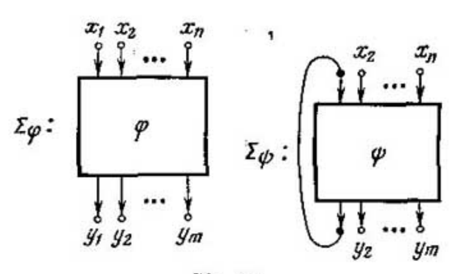


Fig. 30.

cuales se emplean las operaciones. Por ejemplo, $O_1(x_1, x_3)$, $O_2(y_5)$, $Q_3(x_{10}, y_2)$.

Definamos otras dos operaciones sobre las funciones determinadas.

4) *Operación O_4, de unión de dos* (o *de un número mayor*) *de funciones.* Sean $\varphi_1 \in \Phi_k^{n_1, m_1}$ y $\varphi_2 \in \Phi_k^{n_2, m_2}$. Supondremos que estas funciones tienen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1}$ y $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n_2}$ en calidad de

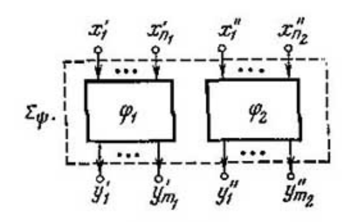


Fig. 31.

variables de entrada, e $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{m_1}$ e $y''_1, y''_2, \ldots, y''_{m_2}$ como variables de salida, respectivamente. Consideramos que todas estas variables son distintas de par en par. Sean Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2} los esquemas de las funciones φ_1 y φ_2, respectivamente. Entonces, el esquema Σ_ψ de la función ψ, igual a la unión de las funciones φ_1 y φ_2, tendrá un aspecto como el mostrado en la fig. 31; además, los polos de salida (de entrada) del esquema Σ_ψ son todos polos de salida (de entrada)

de los esquemas iniciales Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2}. El sistema de ecuaciones canónicas (y de las condiciones iniciales) de la función ψ se obtiene por una sencilla unión de los correspondientes sistemas de las funciones φ_1 y φ_2 (con esto, naturalmente, se supone que los conjuntos $Q^{(1)}$ y $Q^{(2)}$ de todos los estados de las funciones φ_1 y φ_2 no se intersecan).

5) *Operación S, de superposición.* Sean $\varphi_1 \in \Phi_{A,\,B}$ y $\varphi_2 \in \Phi_{B,\,C}$. Se llama *superposición* φ_1 (φ_2) *de los operadores* φ_2 y φ_1, a un operador $\psi \in \Phi_{A,\,C}$ tal, que $\psi(\widetilde{x}^\omega) = \varphi_1(\varphi_2(\widetilde{x}^\omega))$ para cualquier palabra de entrada $\widetilde{x}^\omega$ de A^ω. Sean los operadores $\varphi_i \in \Phi_k^{n_i,\,m_i}$ ($i = 1, 2$) y que a ellos les correspondan los esquemas Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2} (consideramos que las variables de entrada y las de salida y los estados de las funciones

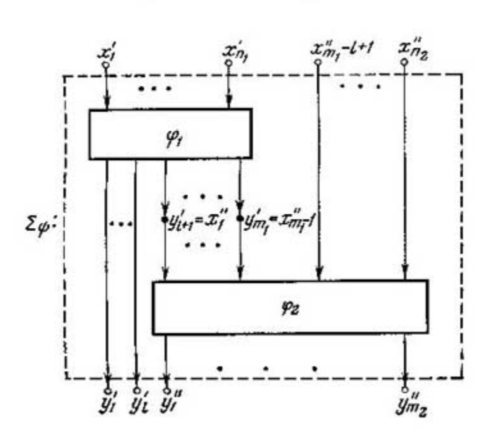


Fig. 32.

φ_1 y φ_2, son iguales a los de la frase anterior). Entonces se puede considerar «otra» *superposición* de estos operadores: identificamos, por ejemplo, el polo de entrada x_1'' del esquema Σ_{φ_2} con el polo de salida y'_{l+1} del esquema Σ_{φ_1}; el polo x_2'', con el polo y'_{l+2}, y así sucesivamente; por último, el polo x''_{m_1-l}, con el polo y'_{m_1}; obtenemos el esquema Σ_ψ (fig. 32), en el que: a) serán polos de entrada todos los polos de entrada del esquema Σ_{φ_1} y los polos de entrada del esquema Σ_{φ_2} que no hayan participado en el proceso de identificación arriba indicado; b) son polos de salida todos los polos de salida del esquema Σ_{φ_2} y aquellos polos de salida del esquema Σ_{φ_1} que no fueron identificados con ninguno de los polos de salida del esquema Σ_{φ_2}. Los polos identificados se declaran vértices interiores del esquema Σ_ψ. El esquema Σ_ψ se llama *superposición de los esquemas* Σ_{φ_2} y Σ_{φ_1} (para las variables $x_1'' - y'_{l+1}$, $x_2'' - y'_{l+2}$, ..., $x''_{m_1-l} - y'_{m_1}$). Si el

operador φ_1 se da por el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1(t)=F'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{m_1}(t)=F'_{m_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ q'_1(t)=G'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_{r_1}(t)=G'_{r_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ q'_{r_1}(t-1)), \\ q'_{r_1}(0)=q'_{01},\ \ldots,\ q'_{r_1}(0)=q'_{0r_1}, \end{array}\right. \qquad (4')$$

y el operador φ_2, por el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y''_1(t)=F''_1(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y''_{m_2}(t)=F''_{m_2}(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)), \\ q''_1(t)=G''_1(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q''_{r_2}(t)=G''_{r_2}(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t)\ \ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)), \\ q''_1(0)=q''_{01},\ \ldots,\ q''_{r_2}(0)=q''_{0r_2}, \end{array}\right. \qquad (4'')$$

entonces, al operador ψ, realizado por el esquema Σ_ψ, le corresponde el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1(t)=F'_1(x'_1,\ (t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_l(t)=F'_l(x'_1,\ (t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t)\,q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ y''_1(t)=F''_1(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots \\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ q_{r_2}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y''_{m_2}(t)=F''_{m_2}(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots \\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)), \\ q'_1(t)=G'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_{r_1}(t)=G'_{r_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)), \\ q_1(t)=G''_1(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots \\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{r_2}(t)=G''_{r_2}(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots \\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)), \\ q'_1(0)=q'_{01},\ \ldots,\ q'_{r_1}(0)=q'_{0r_1},\ q_1(0)=q''_{01},\ \ldots,\ q_{r_2}(0)=q''_{0r_2}, \end{array}\right. \qquad (5)$$

donde $F'_j = F'_j(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_r\ (t-1))$, $j = l+1, \ldots, m_1$.

Se denomina *elemento de retardo unitario* (en el conjunto $\hat{\Phi}_k$) el operador acotado-determinado φ_3, dado por el sistema

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

EJEMPLO. El operador φ de $\hat{\Phi}_2$ es dado con ayuda de un diagrama de Moore, representado en la fig. 33. La tabla canónica (véase la

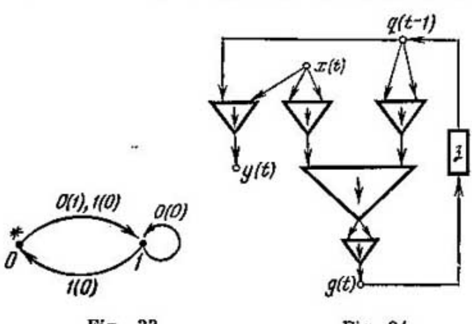


Fig. 33. Fig. 34.

tabla 8), las ecuaciones canónicas y la condición inicial para el mismo tienen el siguiente aspecto:

Tabla 8

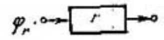
$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{q}(t-1), \\ q(t) = \bar{x}(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

En la fig. 34 se ha diubjado el esquema que realiza este operador y se ha construido con el empleo del elemento de retardo unitario y del operador de $\Phi_1^{2,1}$, engendrado por la flecha de Pears $x \downarrow y$. Aquí, el operador engendrado por la flecha de Pears, se realiza con el es-

quema

y el elemento de retardo unitario, con el esquema



Es sabido, que todo a.-d. operador de $\hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ puede ser realizado por un esquema sobre un conjunto tal que contenga: 1) esquemas que realicen el elemento de retardo unitario; 2) los esquemas que realicen los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo en P_k. En otras palabras, el conjunto de los operadores acotados-determinados, compuesto por el elemento φ_r y por los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo, en P_k genera un sistema completo $\bigcup\limits_{n,m} \hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ con respecto a las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S.

OBSERVACIÓN. En adelante, al referirnos a la construcción del esquema de algún a.-d. operador φ sobre algún conjunto M de operadores acotados-determinados, interpretaremos esto del siguiente modo: el esquema Σ_φ del operador φ se construye con el sólo empleo de esquemas de una salida, que realizan los operadores del conjunto M (además, sólo se permite efectuar las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S, salvo indicaciones adicionales).

2.1. Construir el diagrama de Moore, la tabla canónica y las ecuaciones canónicas para la función $\varphi \in \hat{\Phi}_2$.

1) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$; $\begin{cases} y(2t-1) = x(2t-1), & t \geqslant 1, \\ y(2t) = x(2t) \oplus y(2t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(3t-2) = \overline{x}(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t-1) = x(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t) = x(3t) \cdot y(3t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

4) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = \langle 2/3 \rangle$;

5) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = \langle \nu(\widetilde{x}^\omega)/8 \rangle$.

2.2. Predefinir de algún modo el operador parcial φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$, además de tal manera, que se obtenga un a.-d. operador. Construir para el nuevo operador el diagrama de Moore, la tabla canónica y las ecuaciones canónicas.

1) $\varphi([011010]^\omega) = [0111]^\omega$, $\varphi(0[1]^\omega) = 0[1]^\omega$;

2) $\varphi(\widetilde{0}^\omega) = \widetilde{1}^\omega$, $\varphi(1[0]^\omega) = [10]^\omega$;

3) $\varphi(1[10]^\omega) = [01]^\omega$, $\varphi([001]^\omega) = 1[10]^\omega$;

4) φ: $\begin{cases} y(3t-1) = x(3t-1), & t \geqslant 1, \\ y(3t) = \bar{x}(3t-1), & t \geqslant 1. \end{cases}$

2.3. Hallar el peso del a.-d. operador φ de $\hat{\Phi}_2$, dado por las ecuaciones canónicas.

1) φ: $\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1) \vee x(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t)\cdot q_1(t-1) \vee \bar{x}(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\, q_2(t-1) \vee \bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1)\cdot\bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \sim q_1(t-1), \\ q_2(t) = (x(t) \to \bar{q}_1(t-1)) \to \bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$

3) φ es dado por las ecuaciones canónicas del problema anterior, pero con cambios de las condiciones iniciales: $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 1$;

4) φ: $\begin{cases} y(t) = (x(t) \to q_2(t-1)) \to q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to (x(t) \to q_2(t-1)), \\ q_2(t) = q_2(t-1) \to x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$

2.4. Sea que $(\hat{\Phi}_k^{n,m}, X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ indica el conjunto de todas las funciones de $\hat{\Phi}_k^{n,m}$, cuyas variables de entrada son $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y las de salida, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Mostrar que en el conjunto $(\hat{\Phi}_k^{n,m}; X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ el número de funciones de peso w no es mayor que $(w\cdot k^m)^{w\cdot k^n}$.

2.5. Sea que el operador φ de $\hat{\Phi}_2^{n,m}$ está dado por el sistema (2) y las funciones $G_1, G_2, \ldots, G_r$, enlazadas por la relación $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_r \equiv 0$. Mostrar que el peso del operador φ no supera a 2^{r-1}.

2.6. Realizar el operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n, m}$ con un esquema sobre el conjunto compuesto por un elemento de retardo unitario y por el operador engendrado por una línea de Sheffer.

1) φ: $\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 1; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \vee q_1(t-1)) \rightarrow q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \rightarrow q_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \; q_2(0) = 1; \end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \begin{cases} 10\,[110]^\omega, \text{ si } \tilde{x}^\omega = \tilde{0}^\omega, \\ \tilde{1}^\omega, \text{ en caso contrario}; \end{cases}$

4) el operador φ es dado por el diagrama de Moore dibujado en la fig. 35;

5) φ: $\begin{cases} y_1(t) = x(t) \rightarrow \bar{q}_1(t-1), \\ y_2(t) = q_1(t-1) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}(t), \\ q_2(t) = (q_1(t-1) \vee q_2(t-1) \cdot \bar{x}(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$

2.7. Según el esquema del operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n, m}$ construir las ecuaciones canónicas, tabla canónica y el diagrama de Moore.

1) Véase la fig. 36, *a*; 2) véase la fig. 36, *b*; 3) véase la fig. 36, *c*.

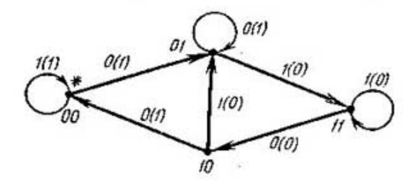


Fig. 35.

2.8. Para la superposición $\psi = \varphi_1(\varphi_2)$ de los operadores φ_2 y φ_1 de $\hat{\Phi}_2$, construir las ecuaciones canónicas, el diagrama de Moore y el esquema Σ_ψ. El esquema Σ_ψ debe ser construido sobre el conjunto compuesto por el elemento de retardo unitario y por operadores

engendrados por la implicación $x \to y$ y la negación $\bar{x}$.

$$1)\ \varphi_1: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to x_1(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_2: \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi_1(\widetilde{x^\omega}) = \langle 1/3 \rangle,$$

el operador φ_2 es dado por el diagrama de Moore, que se muestra

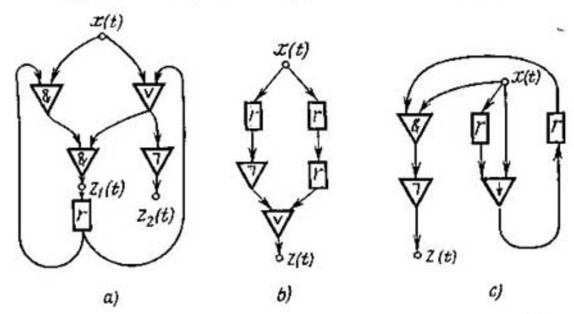


Fig. 36.

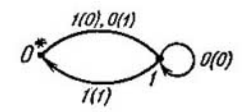


Fig. 37.

en la fig. 37;

$$3)\ \varphi_1(\widetilde{x^\omega}): \begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = y(t-1) \oplus x(t-1),\ t \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(\widetilde{x^\omega}): \begin{cases} y(t) = 1, \\ y(t) = x(t) \to x(t-1),\ t \geqslant 2; \end{cases}$$

$$4)\ \varphi_1(\widetilde{x^\omega}): \begin{cases} y(t) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \to x(t),\ t \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\widetilde{x^\omega}):\ \langle 1/7 \rangle.$$

2.9. Construir las ecuaciones canónicas y el diagrama de Moore del a.-d. operador obtenido del operador φ con la introducción de la retroacción por las variables x_2, y_1.

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = q(t-1) \to x_1(t)\,\overline{x}_3(t), \\ y_2(t) = x_2(t) \vee (x_1(t) \to q(t-1)), \\ q(t) = \overline{x}_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1) \to x_1(t)\,x_3(t), \\ y_2(t) = (x_1(t) \downarrow q(t-1)) \vee x_2(t), \\ q(t) = x_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

2.10. Hallar el peso del a.-d. operador, obtenido del a.-d. operador φ con la introducción de la retroacción por las variables x_3, y_2.

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to (x_3(t) \to q(t-1)), \\ y_2(t) = x_2(t) \to x_1(t), \\ q(t) = x_2(t) \to (x_1(t)\cdot\overline{x}_3(t) \to (x_1(t) \to q(t-1))). \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\,x_3(t) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t)\,q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

2.11. Sea que el operador ψ se obtiene del operador φ con ayuda de la operación O_1 (identificación de las variables de entrada).

1) Mostrar un ejemplo de un par de operadores φ y ψ, para el que se cumpla la desigualdad: el peso del operador φ es mayor que el del ψ.

2) ¿Es posible que el peso del operador φ fuese menor que el peso de ψ?

2.12. Sean, φ, un a.-d. operador de peso r, y ψ, un operador de peso r', obtenido de φ con la introducción de la retroacción por algún par de variables. ¿Es cierto que siempre

1) $r \geqslant r'$; 2) $r = r'$; 3) $r \leqslant r'$?

2.13. Sea que los a.-d. operadores φ_1 y φ_2 tengan los pesos r_1 y r_2, respectivamente. ¿A qué es igual el peso del operador ψ obtenido de φ_1 y φ_2 con ayuda de la operación O_4 (de unión)?

2.14. Los a.-d. operadores φ_1 y φ_2 tienen pesos igual a r_1 y r_2, respectivamente. ¿Puede ser el peso de la superposición $\varphi_1(\varphi_2)$

1) mayor que r_1; 4) mayor que $r_1 \cdot r_2$;
2) mayor que r_2; 5) menor que r_1;
3) mayor que $r_1 + r_2$; 6) menor que r_2?

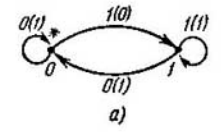
2.15. Hallar el peso de la superposición $\varphi_1(\varphi_2)$, si:

1) los operadores φ_1 y φ_2 son dados por los diagramas de Moore representados en la fig. 38, *a*, *b*;

2) los operadores φ_1 y φ_2 se expresan mediante los diagramas de Moore de la fig. 39, *a*, *b*;

3) φ_i: $\begin{cases} y_i(t) = x_i(t) \to q_i(t-1), \\ q_i(t) = q_i(t-1) \to x_i(t), \quad i = 1, 2. \\ q_i(0) = 0. \end{cases}$

El operador φ de $\Phi_{A,\,B}$ se llama *autónomo* (*constante*, *operador sin entrada*), si para cualquier palabra de entrada $\tilde{x}^{\omega} \in A^{\omega}$ el valor



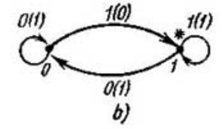
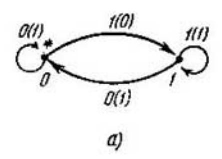


Fig. 38.



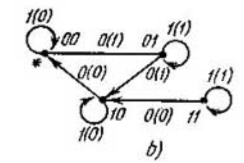


Fig. 39.

del operador φ en $\tilde{x}^{\omega}$ es igual a una misma palabra (de salida) de B^{ω}.

2.16. ¿Es autónomo el operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2$?

1) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1) = y(2) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \oplus y(t-2), \quad t \geqslant 3; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 1; \end{cases}$

3) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(2t-1) = \overline{y}(2t-2), \quad t \geqslant 2, \\ y(2t) = \left|\cos \frac{\pi}{2} t\right|, \quad t \geqslant 1. \end{cases}$

2.17. Sea φ un operador autónomo de peso r $(r < \infty)$.

1) Mostrar que la palabra de salida del operador φ es casi periódica.

2) Demostrar que la suma de las longitudes del período y del preperíodo de la palabra de salida del operador φ, no es mayor que r.

2.18. Sobre el conjunto

$$M = \{\ \boxed{r},\ \neg,\ \vee\ \}$$

construir un esquema Σ_φ tal, que contenga exactamente cuatro elementos de M y realice algún operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$ (véase la observación de la página 173).

2) ¿Se puede construir (sobre el conjunto M) un esquema Σ_φ que realice algún operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$ y que contenga menos de cuatro elementos?

Operación O_5, de ramificación (de alguna salida de una a.-d. función). Esta operación puede ser definida así. Sean φ, un operador de $\hat{\Phi}_k^{n,\,m}$, y Σ_φ el esquema que lo realiza. Como resultado del empleo de la operación O_5 en la salida y_j de la función φ, se obtiene el operador ψ, que realiza un esquema Σ_ψ tal, que en lugar de un canal (y polo) y_j aparecen varios canales $y_j^{(1)}, \ldots, y_j^{(s)}$ $(s \geqslant 2)$ que «trabajan igual» siendo que cada uno de estos canales realiza la misma función que y_j en el esquema Σ_φ.

2.19. 1) ¿Qué cambios hay que introducir en el sistema de ecuaciones canónicas y de condiciones iniciales que dan la función φ, para obtener un sistema correspondiente a la función ψ, que sea resultado del empleo de la operación O_5 en la salida y_j de la función φ?

2) ¿Se puede, empleando las operaciones $O_1 - O_5$ y S, construir sobre el conjunto M (véase el problema 2.18) un esquema Σ_φ, tal, que contenga no más de tres elementos y realice el operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$? (Véase la observación de la página 173.)

2.20 Sea que el operador ψ fue obtenido de $\varphi \in \hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ como resultado del empleo de la operación O_5 en alguna salida del operador φ. Mostrar que el operador ψ se puede realizar sobre el conjunto $\{\varphi\}$ (o sea, utilizando varios ejemplares del operador φ) con ayuda de las operaciones O_1, O_2 y O_4.

2.21. Los operadores φ_1 y φ_2 de $\hat{\Phi}_2$ tienen un peso igual a 2 y son dados por las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\varphi_i\colon \left\{ \begin{array}{l} y_i(t) = F_i\,(x_i\,(t),\ q_i\,(t-1)), \\ q_i(t) = G_i\,(x_i\,(t),\ q_i\,(t-1)), \quad i = 1,\ 2, \\ q_i(0) = 0, \end{array} \right.$$

además, $G_1\,(x,\ q) \equiv G_2\,(x,\ q)$. Es sabido, que si en el diagrama de Moore del operador φ_1 se sustituyen los ceros, atribuidos a los arcos,

por unidades, y las unidades por ceros, entonces se obtiene el diagrama de Moore del operador φ_2. Demostrar que si los valores de salida de los operadores φ_1 y φ_2 coinciden en algún prefijo de longitud 2 (o sea, $\varphi_1(\sigma_1\sigma_2) = \varphi_2(\sigma_1\sigma_2)$ para algunos σ_1, σ_2), entonces estos operadores son idénticamente iguales.

2.22. Contar el número de todas aquellas a.-d. funciones en $\hat{\Phi}_2$ que cumplen las siguientes condiciones: a) la función depende de la variable de entrada X; b) el peso de la función es igual a tres; c) en el diagrama de Moore que da la función, el semigrado de paso (de transición) de cada vértice es siempre el mismo e igual al semigrado de salida.

2.23. Para cada $r \geqslant 2$ mostrar un ejemplo de un operador φ de $\hat{\Phi}_2$ tal, que el peso de la superposición $\varphi(\varphi)$ sea igual a r. ¿Se puede hacer esto para los operadores no autónomos?

2.24. El peso de la función $\varphi \in \hat{\Phi}_2$ es igual a r, y el peso de la superposición $\varphi(\varphi)$ es $2r$. ¿Es cierto que el peso de la superposición $\varphi(\varphi(\varphi))$ es igual a $3r$?

§ 3. CLASES CERRADAS Y PLENITUD EN LOS CONJUNTOS DE FUNCIONES DETERMINADAS Y ACOTADAS-DETERMINADAS

Sea M algún conjunto de *d.* funciones (o de a.-d. funciones) y $\mathfrak{O}$ alguna *colección de operaciones*, que no salen de los límites del conjunto de todas las d. funciones (o de las a.-d. funciones). En otras palabras, si $\sigma \in \mathfrak{O}$, entonces, empleando σ en d. funciones (o a.-d. funciones) arbitrarias (o admisibles), obtenemos nuevamente d. funciones (o a.-d. funciones). Se llama *clausura* o *cierre* $[M]_{\mathfrak{O}}$ *del conjunto M con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, el conjunto de todas las d. funciones (o a.-d. funciones) que pueden ser obtenidas de las funciones del conjunto M con ayuda de las operaciones de $\mathfrak{O}$, además, estas operaciones pueden ser efectuadas cualquier número finito de veces. Habitualmente se considera que $[M]_{\mathfrak{O}} \supseteq M$. En adelante casi siempre supondremos que esta inclusión se cumple (de lo contrario, se harán salvedades especiales). La operación de obtención del conjunto $[M]_{\mathfrak{O}}$ de M se llama *operación de clausura* o *de cierre*. El conjunto M se denomina (*funcionalmente*) *clase de clausura* o *de cierre con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[M]_{\mathfrak{O}} = M$. Sea M cerrado con respecto a la colección de operaciones $\mathfrak{O}$ de las clases de d. funciones (o a.-d. funciones). El subconjunto $\mathfrak{P}$ de M se llama (*funcionalmente*) *sistema completo en M con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[\mathfrak{P}]_{\mathfrak{O}} = M$. El conjunto $\mathfrak{P}$ de las d. (o, a.-d.) funciones se denomina *sistema irreducible con respecto a la colección de las operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[\mathfrak{P}']_{\mathfrak{O}} \subset [\mathfrak{P}]_{\mathfrak{O}}$ para cualquier sub-

conjunto propio $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ (¡la infclusión es rigurosa!). Se llama *base* de la clase cerrada M con respecto a la colección de operaciones $\mathfrak{O}$, a todo sistema completo e irreducible de M. El conjunto M', contenido en la clase cerrada M, se denomina *clase precompleta en* M, si éste no es sistema completo en M pero para toda función $\varphi \in \in M \setminus M'$ se cumple la igualdad $[M' \cup \{\varphi\}]_{\mathfrak{O}} = M$.

Observación 1. En adelante, cuando está claro con respecto a qué colección $\mathfrak{O}$ se considera la clausura, los sistemas completos, las bases, etc., la expresión «con respecto a la colección de las operaciones $\mathfrak{O}$» se omitirá.

Observación 2. Habitualmente en calidad de $\mathfrak{O}$ tomaremos el conjunto $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, compuesto de las operaciones descritas en el § 2 de este capítulo.

Como se indicó en el § 2, el conjunto de las a.-d. funciones que contiene el elemento de retardo unitario φ_3 y los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo en P_k ($k \geqslant 2$), genera un sistema completo en el conjunto $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ con respecto a las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S (o sea, en el conjunto de todas las *a.-d. funciones k-valentes*).

Resulta que en el conjunto $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ ($k \geqslant 2$) existen bases con respecto a $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, compuestas por una función. Ejemplo de una base así resulta el conjunto $\{\varphi_0(X_1, X_2, X_3, \varphi_3(X_4))\}$, donde φ_3 es el elemento de retardo unitario de $\hat{\Phi}_k$, y φ_0 es un operador de $\hat{\Phi}_k^{4,1}$ engendrado por la función $\text{máx}\,(x_1 \cdot x_4 + + x_2(1 - x_4), x_3) + 1$ (la suma, la sustracción y el producto, por módulo k).

En todo este párrafo emplearemos el símbolo $\hat{\Phi}_{(k)}$ (respectivamente, $\Phi_{(k)}$) para la designación del conjunto de todos los k-valores de las a.-d. funciones (correspondientemente, d. funciones), incluidas las funciones sin entradas o sin salidas, o las sin entradas y sin salidas, o sea,

$$\hat{\Phi}_{(k)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m} \left(\text{y } \Phi_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \Phi_k^{n,m}\right).$$

3.1. ¿Resulta el conjunto M una clase cerrada con respecto a la colección de operaciones $\mathfrak{O}$?

1) M se compone de todas las a.-d. funciones k-valentes que no tienen salida, y también de tales funciones φ, que pertenecen a $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$, que «conservan $\tilde{0}^{\omega}$», o sea,

$$\varphi(\underbrace{0^{\tilde{\omega}}, \ldots, 0^{\tilde{\omega}}}_{n \text{ veces}}) = (\underbrace{0^{\tilde{\omega}}, \ldots, 0^{\tilde{\omega}}}_{m \text{ veces}}); \ \mathfrak{O} = \{O_3, O_5, S\}.$$

2) M está compuesto de todas aquellas a.-d. funciones k-valentes, que pertenecen al conjunto $\bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{1,m}$ y tienen un peso múltiplo de k; $\Theta = \{S\}$.

3) M se compone de todas las d. funciones k-valentes, que pertenecen al conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ y que tienen peso par o infinito; $\Theta = \{O_1, O_2, O_4, O_5\}$.

$$4)\ M = \bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} (\Phi_k^{n,m} \setminus \hat{\Phi}_k^{n,m});\ \Theta = \{O_3, S\}.$$

3.2. 1) Sea φ_3 un elemento de retardo unitario del conjunto $\hat{\Phi}_2$ y $\Theta = \{O_3, O_5, S\}$. Demostrar que la clase $[\varphi_3]_\Theta$ contiene solamente funciones idénticamente iguales a 0 (o sea, operadores que en cada una de sus salidas «brindan» la palabra $\tilde{0}^\omega$), funciones sin entradas y salidas y funciones que tienen peso par.

2) Formular un ejemplo de función de $\hat{\Phi}_2$ que tenga peso par y no pertenezca a la clase $[\varphi_3]_\Theta$, descrita en el problema 3.2, 1).

3.3. Sean, $\varphi_0 (X_1, X_2)$, un operador de $\hat{\Phi}_{(2)}$ engendrado por el trazo de Sheffer $x_1 \mid x_2$, y φ_3, un elemento de retardo unitario de $\hat{\Phi}_2$. Demostrar que el operador $\varphi (\tilde{x}^\omega) = \langle 1/3 \rangle$ de $\hat{\Phi}_2$ no pertenece a la clase $[\varphi_0, \varphi_3]_\Theta$, si $\Theta = \{S\}$.

3.4. En la entrada del a.-d. operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2$ se introduce la palabra periódica $\tilde{x}^\omega$ de período 3. Hallar el período máximo de la palabra de salida (el máximo se toma con respecto a todas las palabras periódicas de entrada de período 3).

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = (x(t) \oplus q_1(t-1)) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \cdot \bar{q}_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t) \cdot \bar{q}_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{q}_1(t-1) \vee q_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

3.5. Sea φ una a.-d. función de peso r, perteneciente al conjunto $\hat{\Phi}_{A,\ B}$.

1) Mostrar que si la palabra de entrada $\tilde{x}^\omega$ es casi periódica con período T, entonces la palabra de salida $\varphi (\tilde{x}^\omega)$ también es casi periódica y su período no es superior al número $r \cdot T$.

2) Evaluar desde arriba la longitud del período de la palabra de salida $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$, si se sabe que la longitud del preperíodo de la palabra $\tilde{x}^{\omega}$ es igual a p.

3.6. Sean las funciones φ_0, φ_3 y φ las mismas que las del problema 3.3. ¿Existe algún $s \geqslant 1$ que satisfaga la condición $\varphi(\varphi_3^s(X)) \in \in [\varphi_0, \varphi_3]_{\Theta}$, donde $\Theta = \{S\}$? (Aquí $\varphi_3^s(X) = \varphi_3(\varphi_3(\ldots\varphi_3(X)\ldots))$ es una superposición de s «ejemplares» de las funciones φ_3.)

Si $f(\tilde{x}^n) \in P_k$, entonces, mediante $\varphi_{f(\tilde{x}^n)}(X_1, \ldots, X_n)$ designaremos al a.-d. operador (de $\hat{\Phi}_k^{n,1}$), engendrado por la función $f(\tilde{x}^n)$.

3.7. ¿Son completos en $\hat{\Phi}_{(k)}$ con respecto a la colección de las operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$ los siguientes sistemas de a.-d. funciones?

1) $\{\varphi_{\max(x_1, x_2)}(X_1, X_2), \varphi_3(X)\}$, $k \geqslant 2$;

2) $\{\varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(\varphi_3(X), X_2),$
$\varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{\equiv k-2}(X)\}$, $k \geqslant 3$ (aquí $\varphi_{\equiv j}(X)$ es un a.-d. operador, engendrado por una función de P_k, idénticamente igual a j);

3) $\{\varphi_{x+1}(X), \varphi_3(\varphi_3(X)), \varphi_{x \dot{-} y}(\varphi_3(X), X_2)\}$.

3.8. Del sistema $\mathcal{P}$ completo en $\hat{\Phi}_{(k)}$ con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, separar aunque sea una base.

1) $\mathcal{P} = \{\varphi_3(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2),$
$\varphi_{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}(X_1, X_2, X_3)\}$, $k = 2$;

2) $\mathcal{P} = \{\varphi_3(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{j_0(x)}(X),$
$\varphi_{x_1 + x_2}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$

3) $\mathcal{P} = \{\varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(\varphi_3, (X), X_2), \varphi_{x+1}(X),$
$\varphi_{\min(x_1, x_2)}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$.

3.9*. ¿Existe en $\hat{\Phi}_{(2)}$ una base con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, que contenga cinco funciones?

3.10*. Demostrar que en $\hat{\Phi}_{(k)}$ cualquier clase cerrada, distinta de todo el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$, se amplía hasta una clase precompleta[1]).

3.11*. Empleando los problemas 3.8, 1) y 3.10, mostrar que en $\hat{\Phi}_{(2)}$ existen no menos de 4 clases precompletas.

3.12. Sea $\varphi_3 \in \hat{\Phi}_2$. Enumerar todas las clases precompletas en $[\varphi_3]_{\{O_3, O_5, S\}}$ con respecto a la colección de operaciones $\{O_5, S\}$.

3.13. Sea $\varphi_x = \varphi_x(X)$ un a.-d. operador de $\Phi_{(k)}$, engendrado por la función x. Demostrar que cualquiera que sea la clase cerrada[1]) M de $\Phi_{(k)}$, siempre se cumple la igualdad $[M \cup \{\varphi_x\}] = M \cup \{\varphi_x\}$ (aquí, como es habitual, junto con la función se toman todas las funciones iguales y congruentes a la misma).

---

[1]) Las condiciones de cerrada y precompleta se toman con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, P_4, S\}$.

3.14. ¿Existe una función que pertenezca a cada clase precompleta $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.15. ¿Se puede representar el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ en forma de la unión $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ $(s \geqslant 2)$ que interseca de par en par a las clases cerradas[1]) en $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.16*. Demostrar que en $\hat{\Phi}_{(k)}$ la potencia del conjunto de todas las clases cerradas es continua.

3.17. ¿Cuál es la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) en $\hat{\Phi}_{(k)}$ que tienen sistemas completos finitos?

3.18*. Demostrar que en $\Phi_{(k)}$ la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) es igual a 2^{c} (potencia de hipercontinuidad).

3.19*. Hallar la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) en $\Phi_{(k)}$, que tienen bases finitas.

3.20. Refutar las siguientes afirmaciones:

1) el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ genera una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$;

2) en el conjunto $\Phi_{(k)}$ existe una función que forma, junto con el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$, un sistema completo en $\Phi_{(k)}$.

3.21. Sea M_0 un conjunto compuesto por todas las d. funciones k-valentes que no tienen salidas, y también por todas aquellas funciones φ, pertenecientes a $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$, que toma el valor 0 para $t = 1$, o sea, $\varphi(\widetilde{x}_1^{\omega}, \ldots, \widetilde{x}_n^{\omega}) = (\widetilde{y}_1^{\omega}, \ldots, \widetilde{y}_m^{\omega})$, e $y_j(1) = 0$, para $j = \overline{1, m}$.

1) ¿Es M_0 una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$?

2) ¿Forma la intersección $M_0 \cap \hat{\Phi}_{(k)}$ la clase precompleta $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.22. 1) ¿Es clase precompleta en $\hat{\Phi}_{(k)}$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} \times$ $\times \hat{\Phi}_k^{n,m}$?

2) ¿Forma una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} \times$ $\times \Phi_k^{n,m}$?

---

[1]) Las condiciones de cerrada y precompleta se toman con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

Capítulo
VII

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS ALGORITMOS

§ 1. MAQUINAS DE TURING Y OPERACIONES A LAS QUE SE SOMETEN. FUNCIONES CALCULABLES EN LAS MAQUINAS DE TURING

Una *máquina de Turing* representa en sí un aparato (abstracto) que está compuesto de *cinta*, *de la unidad de mando* y *del cabezal de lectura*.

La cinta está dividida en *células*. En cualquier célula en cada momento (discreto) hay exactamente un *símbolo* del *alfabeto exterior* $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $n \geqslant 2$. A cierto símbolo del alfabeto A se le denomina *vacío* y cualquier célula que contenga en el momento dado el símbolo vacío se la llama *célula vacía* (en este momento). En calidad de símbolo vacío corrientemente se emplea el 0 (cero). Se supone que la cinta es ilimitada potencialmente en los dos sentidos[1]).

La unidad de mando en cada momento se encuentra en cierto *estado* q_j perteneciente al conjunto $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{r-1}\}$, $r \geqslant 1$. El conjunto Q se denomina *alfabeto interior* (o *conjunto de los estados interiores*). A veces se separan de Q los subconjuntos no interseccionados Q_1 y Q_0 de los *estados iniciales* y *conclusivos* respectivamente.

OBSERVACIÓN. En adelante, si no se menciona lo contrario, consideraremos que $|Q| \geqslant 2$ y en calidad de inicial tomaremos sólo el estado q_1. Como regla general el estado q_0 será conclusivo.

El cabezal lector (o impresor) se traslada a lo largo de la cinta y en cada momento él observa exactamente una célula de la cinta. Este cabezal puede *leer* el contenido de la célula observada y *anotar* en ella (*imprimir* en ella) en lugar del símbolo observado cierto símbolo nuevo del alfabeto exterior. El símbolo «enviado» a la célula puede, en particular, coincidir con el que se estaba observando (en el momento dado).

---

[1]) Esto se debe entender de la manera siguiente: en cada momento la cinta se considera finita (contiene un número finito de células), pero las «dimensiones» de la cinta (su número de células) se puede aumentar (si es necesario).

En el proceso de funcionamiento la unidad de mando, en dependencia del estado en que se encuentra y del símbolo que observa el cabezal, cambia su estado interior (puede quedarse en el estado anterior), da al cabezal la orden de imprimir en la célula observada un símbolo determinado del alfabeto exterior y «ordena» al cabezal quedarse en el mismo lugar, trasladarse a una célula más a la izquierda, o bien trasladarse a una célula más a la derecha.

El trabajo de la unidad de mando se caracteriza por las tres funciones siguientes:

$$G\colon Q \times A \to Q,$$
$$F\colon Q \times A \to A,$$
$$P\colon Q \times A \to \{S,\ L,\ R\}.$$

La función G se llama *función de los traspasos* o *de los traslados*; la función F, *función de las salidas*, y la D, *función del movimiento* (*del cabezal*). Los símbolos S, L y R significan respectivamente que el cabezal no se mueve en ninguna dirección, el traslado del cabezal a la célula vecina de la izquierda, el traslado del cabezal a la célula vecina de la derecha.

Las funciones G, F y D se pueden presentar con una lista de grupos de cinco palabras del tipo siguiente:

$$q_i a_j G\ (q_i a_j)\ F\ (q_i a_j)\ D\ (q_i a_j) \qquad (1)$$

o abreviadamente, $q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Estos grupos de cinco se llaman *instrucciones*. Las funciones G, F y D son, hablando en general, *parciales* (no están determinadas en todas partes). Esto quiere decir que no para cualquier par $(q_i,\ a_j)$ está definido el respectivo grupo de cinco del tipo (1). La lista de todos los grupos de cinco que determina el trabajo de la máquina de Turing se llama *programa* de esta máquina. Con frecuencia se presenta el programa de la máquina en forma de tabla (véase la tabla 9).

Tabla 9

	$q_0 \ldots q_i \ldots q_{r-1}$
a_0	·
	·
...	·
a_j	... $q_{ij}a_{ij}d_{ij}$ ...
...	·
a_{n-1}	·

Si en el programa de la máquina para el par $(q_i,\ a_j)$ no hay grupo de cinco del tipo (1), entonces en la tabla en el cruce de la fila a_j y la columna q_i se pone una raya.

Suele ser cómodo describir el funcionamiento de la máquina de Turing en «el lenguaje de las configuraciones».

Supongamos que en el momento t la célula no vacía C_1 de la cinta, la que está más a la izquierda, contiene el símbolo a_{j_1} y la célula no vacía C_s ($s \geqslant 2$), que está más a la derecha, contiene el símbolo a_{j_s} (entre las células C_1 y C_s hay $s - 2$ células). En este caso diremos que en el *momento t* en la cinta está *escrita la palabra* $P = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_p} \ldots a_{j_s}$, donde a_{j_p} es el símbolo que se contiene en el momento t en la célula C_p ($1 \leqslant p \leqslant s$). Con $s = 1$, o sea cuando en la cinta hay un solo símbolo no vacío, $P = a_{j_1}$. Supongamos que en este momento la unidad de mando se encuentra en el estado q_i y el cabezal observa el símbolo a_{jl} de la palabra P ($l \geqslant 2$). Entonces la palabra

$$a_{j_1} \ldots a_{j_{l-1}} q_i a_{j_l} \ldots a_{j_s} \tag{2}$$

se llama *configuración de la máquina* (en el momento dado t). Con $l = 1$ la configuración tiene la forma $q_i a_{j_1} \ldots a_{j_s}$. Si en el momento t el cabezal observa una célula vacía que se encuentra a la izquierda (o a la derecha) de la palabra P, y entre esta célula y la primera (respectivamente la última) célula de la palabra P hay $v \geqslant 0$ células vacías, entonces se llama *configuración de la máquina en el momento t* la palabra

$$q_l \underbrace{\Lambda \ \ldots \ \Lambda}_{v+1 \text{ veces}} a_{j_1} \ \ldots \ a_{j_s} \tag{3}$$

(respectivamente la palabra $a_{j_1} \ldots a_{j_s} \underbrace{\Lambda \ldots \Lambda}_{v \text{ veces}} q_l \Lambda$, donde con Λ se designa el símbolo vacío del alfabeto A. Si en el momento t la cinta está vacía, o sea que en ella está escrita una palabra vacía compuesta solamente de símbolos vacíos del alfabeto exterior, entonces la *configuración de la máquina* en el momento t será la palabra $q_i \Lambda$.

Supongamos que en el momento t la configuración de la máquina tiene la forma (2) y en el programa de la máquina se contiene la instrucción

$$q_i a_{j_l} q_{ij_l} a_{ij_l} d_{ij_l};$$

entonces con $d_{ij_l} = L$ en el momento siguiente la configuración de la máquina será la palabra:

a) $q_{ij_1} \Lambda a_{ij_1} a_{j_2} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l = 1$;

b) $q_{ij_2} a_{j_1} a_{ij_2} a_{j_3} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l = 2$;

c) $a_{j_1} \ \ldots \ a_{jl-2} q_{ijl} a_{jl-1} a_{ijl} a_{jl+1} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l > 2$.

Los casos cuando $d_{ij_l} = R$ o $d_{ij_l} = S$, o la configuración de la máquina corresponde al cabezal que se encuentra fuera de la palabra

P (como en la palabra (3)), o la palabra P es vacía, se describen en forma análoga.

Si en el programa de la máquina no hay grupo de cinco del tipo (1) para el par (q_i, a_j) o el «nuevo» estado q_{ij_1} es *conclusivo*, entonces la máquina *termina su trabajo* y la configuración que resulta se llama *conclusiva*. La configuración que corresponde al comienzo del trabajo de la máquina se llama *inicial*.

Supongamos que en cierto momento la configuración de la máquina era K y en el momento siguiente se hizo K'. Entonces la configuración K' se llama *inmediatamente deducida de* K (la designación es $K \models K'$). Si K_1 es la configuración inicial, pues la sucesión $K_1, K_2, \ldots, K_m$, donde $K_i \models K_{i+1}$ con $1 \leqslant i \leqslant m-1$ se llama *cómputo de Turing*. Aquí se dice que la configuración K_m *es deducible de* la configuración K_1 y se anota $K_1 \vdash K_m$. Si K_m al mismo tiempo es una configuración conclusiva, entonces se dice que K_m es *conclusivamente deducible* de K_1 y se emplea la anotación: $K_1 \mathrel{|\!\!\dot{-}} K_m$.

Supongamos que la máquina de Turing T comienza a trabajar en cierto momento inicial. La palabra que está escrita en este momento en la cinta se llama *inicial* u *original*. Para que la máquina T comience realmente a trabajar es necesario colocar el cabezal lector sobre alguna célula de la cinta e indicar en qué estado se encuentra la máquina T en el momento inicial.

Si P_1 es la palabra inicial, entonces la máquina T, comenzando a trabajar «en la palabra» P_1 se para después de cierto número de pasos, o no se para nunca. En el primer caso se dice que la máquina T es *aplicable a la palabra* P_1 y el *resultado de la aplicación de la máquina* T *a la palabra* P_1 es la palabra P que corresponde a la configuración conclusiva (la designación es $P = T(P_1)$. En el segundo caso se dice que la máquina T *no es aplicable a la palabra* P_1.

A continuación supondremos, si no se menciona lo contrario, que: 1) la palabra inicial no es vacía; 2) en el momento inicial el cabezal se encuentra sobre la célula no vacía que está más a la izquierda en la cinta; 3) la máquina comienza a funcionar encontrándose en el estado q_1.

Zona de trabajo de la máquina T (*en la palabra* P_1) se llama al conjunto de todas las células que se observan aunque sea una vez durante el tiempo de trabajo de la máquina.

La designación $[P]^m$ se empleará con frecuencia para las palabras del tipo $PP \ldots P$ (m veces); si $P = a$, la palabra es de longitud 1, entonces en lugar de $aa \ldots a$ (m veces) y $[a]^m$ ecribiremos a^m.

Con W designaremos una palabra arbitraria finita en el alfabeto exterior de la máquina de Turing (en particular una palabra *vacía*, o sea compuesta de símbolos vacíos del alfabeto exterior).

Al describir el trabajo de la máquina de Turing «en el lenguaje de las configuraciones» se emplearán expresiones análogas a la siguiente:

$$q_1 1^x 0 1^y 0 W \mathrel{|\!\!\dot{-}} 1^y 0 q_0 W,$$

$x \geqslant 1$ e $y \geqslant 1$. La expresión citada se debe comprender así: la máquina «borra» la palabra 1^x y se para en la primera letra de la palabra W; si W es una palabra vacía, entonces «la parada» tiene lugar en el segundo 0 (cero) después de la palabra 1^y.

Las máquinas de Turing T_1 y T_2 se llaman *equivalentes* (en el alfabeto A) si para cualquier palabra de entrada P (en el alfabeto A) se cumple la relación $T_1(P) \simeq T_2(P)$ que significa lo siguiente: $T_1(P)$ y $T_2(P)$ están definidas o no están definidas simultáneamente[1]), y si ellas están definidas, entonces $T_1(P) = T_2(P)$. El símbolo $\simeq$ se llama *signo de igualdad condicional.*

Supongamos que las máquinas T_1 y T_2 tienen respectivamente los programas $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_2$. Aceptemos que los alfabetos interiores de estas máquinas no se intersecan; que q_1' es cierto estado conclusivo de la máquina T_1, y q_2' algún estado inicial de la máquina T_2. En el programa $\mathfrak{P}_1$ sustituiremos en todas los lugares el estado q_1' por el estado q_2' y uniremos el programa obtenido con el programa $\mathfrak{P}_2$. El nuevo programa $\mathfrak{P}$ define la máquina T, llamada *composición de las máquinas* T_1 y T_2 (*por el par de estados* (q_1', q_2')) y designada por $T_1 \bigcirc T_2$ o T_1T_2 (con más detalle: $T = T(T_1, T_2, (q_1', q_2'))$). El alfabeto exterior de la composición T_1T_2 es la unión de los alfabetos exteriores de las máquinas T_1 y T_2.

Sea q' cierto estado conclusivo de la máquina T y q'' cierto estado de la máquina T que no es conclusivo. En el programa $\mathfrak{P}$ de la máquina T sustituiremos en todos los lugares el símbolo q' por el símbolo q''. Se obtendrá el programa $\mathfrak{P}'$ que define la máquina $T'(q', q'')$. La máquina T' se llama *iteración de la máquina* T (*por el par de estados* (q', q'')).

Sean $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ y $\mathfrak{P}_3$ los programas que representan las máquinas de Turing T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Suponemos que los alfabetos interiores de estas tres máquinas no se intersecan de par en par. Sean q_1' y q_1'' algunos estados conclusivos diferentes entre sí de la máquina T_1. En el programa $\mathfrak{P}_1$ sustituimos en todos los lugares el estado q_1' por cierto estado inicial q_2' de la máquina T_2, y el estado q_1'' por cierto estado inicial q_3' de la máquina T_3. Después uniremos este nuevo programa con los programas $\mathfrak{P}_2$ y $\mathfrak{P}_3$. Obtendremos el programa $\mathfrak{P}$ con el que se da la máquina de Turing $T = T(T_1, (q_1', q_2'), T_2, (q_1'', q_3'), T_3)$. Esta máquina se llama *ramificación de las máquinas* T_2 y T_3 *controlada por la máquina* T_1.

Al representar máquinas de Turing complejas con frecuencia se emplea la llamada *anotación del algoritmo en operadores.* Esta escritura se presenta con líneas compuestas de símbolos de máquinas, símbolos de traspaso (del tipo $\underset{k}{\lfloor \underline{q'}}$ y $\underset{k}{\underline{q''}\rfloor}$) y también de los símbolos α y ω que sirven para designar el comienzo y el final del funcionamiento del algoritmo respectivamente. En la anotación (de cierto algoritmo)

[1]) $T(P)$ está definida (no está definida) si la máquina T es aplicable (no es aplicable) a la palabra P.

en operadores la expresión $T_i \underset{k}{\lfloor q_{i0}} T_j \ldots T_m \underset{k}{q_{n1}\rfloor} T_n$ significa la ramificación de las máquinas T_j y T_n, controlada por la máquina T_i, con la particularidad de que el estado de conclusión q_{i0} de la máquina T_i se sustituye por el estado inicial q_{n1} de la máquina T_n y cualquier otro estado conclusivo de la máquina T_i se sustituye por el estado inicial de la máquina T_j (¡con lo mismo!). Si la máquina T_i tiene un estado conclusivo, entonces los símbolos $\lfloor q_{i0}$ y $q_{n1}\rfloor$ sirven para designar un traspaso incondicional. Allí donde no pueden surgir confusiones los símbolos q_{i0} y q_{n1} se omiten.

EJEMPLO. El esquema de operadores

$$\underset{2}{\lrcorner}\ \underset{1}{\lrcorner}\, T_1 \alpha T_2 \underset{1}{\lfloor q_{20}} T_3 \underset{2}{\lfloor q_{30}} T_4 \omega$$

describe el siguiente «proceso de cálculo». Comienza su funcionamiento la máquina T_2. Si ella acaba su trabajo en el estado q_{20}, entonces comienza a trabajar la máquina T_1 y al acabar el trabajo la máquina T_1 de nuevo «cumple el trabajo» de la máquina T_2. Pero si la máquina T_2 se para en cierto estado conclusivo diferente de q_{20}, entonces «continúa el trabajo» la máquina T_3. Si T_3 llega al estado conclusivo q_{30}, entonces comienza el trabajo la máquina T_1; pero si T_3 acaba su trabajo en cierto estado conclusivo diferente de q_{30}, entonces «continúa el trabajo» la máquina T_4. Si la máquina T_4 alguna vez se para, entonces en esto termina el proceso de cálculo.

Sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \geqslant 1$ una colección arbitraria de números enteros no negativos. La palabra $1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0 \ldots 01^{\alpha_n+1}$ se llama *código de máquina básico* (o sencillamente *código*) de la *colección* $\widetilde{\alpha}$ (en el alfabeto $\{0, 1\}$) y se designa $k(\widetilde{\alpha})$. En particular, la palabra $1^{\alpha+1}$ es el código de máquina básico del número α.

En adelante se examinarán fundamentalmente sólo las *funciones numéricas parciales*. La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n \geqslant 1$ se llama *función numérica parcial* si las variables x_i toman el valor de la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$ y en el caso cuando en la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la función f está determinada, $f(\widetilde{\alpha}) \in N$.

Una función numérica parcial se llama *calculable* (*con métodos de Turing*) si existe una máquina de Turing T_f que tiene las propiedades siguientes:

a) si $f(\widetilde{\alpha})$ está determinada, entonces $T_f(k(\widetilde{\alpha})) = k(f(\widetilde{\alpha}))$;

b) si $f(\widetilde{\alpha})$ no está determinada, entonces o bien $T_f(k(\widetilde{\alpha}))$ no es código de ningún número de N, o bien la máquina T_f no es aplicable a la palabra $k(\widetilde{\alpha})$.

OBSERVACIÓN. A continuación supondremos que en el momento inicial el cabezal de la máquina observa la unidad que está más a la izquierda de la palabra $k(\widetilde{\alpha})$. Se sabe que esta limitación no reduce la clase de funciones calculables.

Si la función f es calculable con los métodos de Turing con la ayuda de la máquina T_f, entonces diremos que la *máquina T calcula la función f*.

1.1. Aclarar si es aplicable la máquina de Turing T, presentada con el programa $\mathfrak{P}$, a la palabra P. Si es aplicable, entonces hallar el resultado del empleo de la máquina T a la palabra P. Se supone que q_1 es el estado inicial, que q_0 es el estado conclusivo y que en el momento inicial el cabezal de la máquina observa la unidad que está más a la izquierda en la cinta.

1) $\mathfrak{P}$: $\begin{cases} q_1 0 q_2 0 R \\ q_1 1 q_1 1 R \\ q_2 0 q_3 0 R \\ q_2 1 q_1 1 L \\ q_3 0 q_0 0 S \\ q_3 1 q_2 1 R \end{cases}$ a) $P = 1^3 0^2 1^2$, b) $P = 1^3 0 1^3$, c) $P = 10\,[01]^2 1$.

2) $\mathfrak{P}$: $\begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_3 0 R \\ q_2 0 q_3 1 L \\ q_2 1 q_2 1 S \\ q_3 1 q_1 1 R \end{cases}$ a) $P = 1^4 01$, b) $P = 1^3 01^2$, c) $P = 1^6$.

3) $\mathfrak{P}$: $\begin{cases} q_1 0 q_1 1 R \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 0 q_1 1 R \\ q_2 1 q_3 1 L \\ q_3 0 q_1 1 L \end{cases}$ a) $P = 101^2$, b) $P = 1^2 0^2 1$, c) $P = [10]^2\, 1$.

1.2. Construir en el alfabeto $\{0, 1\}$ una máquina de Turing que tenga la propiedad siguiente (en calidad de símbolo vacío se toma el 0);

1) la máquina es aplicable a cualquier palabra no vacía en el alfabeto $\{0, 1\}$;

2) la máquina no es aplicable a ninguna palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ y la zona de trabajo en cada palabra es infinita;

3) la máquina no es aplicable a ninguna palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ y la zona de trabajo en cualquier palabra está limitada por un mismo número de células que no depende de la palabra elegida;

4) la máquina es aplicable a las palabras del tipo 1^{3n} $(n \geqslant 1)$ y no es aplicable a ninguna de las palabras del tipo $1^{3n+\alpha}$, donde $\alpha = 1, 2$ y $n \geqslant 1$;

5) la máquina es aplicable a las palabras del tipo $1^\alpha 0 1^\alpha$, donde $\alpha \geqslant 1$ y no es aplicable a las palabras $1^\alpha 0 1^\beta$ si $\alpha \neq \beta$ $(\alpha \geqslant 1$ y $\beta \geqslant 1)$.

1.3. A base de la máquina de Turing T dada y de la configuración inicial K_1 hallar la configuración conclusiva (q_0 es el estado conclusivo).

1) T:

	q_1	q_2
0	q_01S	q_10R
1	q_20R	q_21L

a) $K_1 = 1^2q_11^301$, b) $K_1 = 1q_11^4$,

2) T:

	q_1	q_2	q_3
0	q_00S	q_01L	q_11L
1	q_21R	q_30R	q_10R

a) $K_1 = 1q_11^5$, b) $K_1 = q_11^301$, c) $K_1 = 10q_11^4$.

1.4. Construir en el alfabeto $\{0, 1\}$ una máquina de Turing que traspasa la configuración K_1 a la configuración K_0.

1) $K_1 = q_11^n$, $K_0 = q_01^n01^n$ $(n \geqslant 1)$;

2) $K_1 = q_10^n1^n$, $K_0 = q_0[01]^n$ $(n \geqslant 1)$;

3) $K_1 = 1^nq_10$, $K_0 = q_01^{2n}$ $(n \geqslant 1)$;

4) $K_1 = 1^nq_101^m$, $K_0 = 1^mq_001^n$. $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$.

1.5. 1) Mostrar que para toda máquina de Turing existe una máquina equivalente a ella cuyo programa no contiene el símbolo S.

2) Mostrar que a base de cualquier máquina de Turing T se puede construir una máquina equivalente a ella en el programa de la cual no se contengan estados de conclusión.

1.6. El programa de una máquina de Turing tiene la forma

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_21R	q_31R	q_12L	q_23R
1	q_41L	q_31R	q_21R	q_31R
2	q_12L	q_20R	q_32R	—
3	—	q_23R	q_30R	q_43L

(el símbolo vacío es 0, el estado inicial es q_1).

1) Mostrar que comenzando el funcionamiento desde una cinta vacía la máquina T con $t(n)$ pasos construirá una palabra del tipo $P_n = 11010^2\,10^3\,\ldots\,10^n1$ (n es un número entero positivo arbitra-

rio), con la particularidad de que el cabezal de la máquina en cualquier momento $t \geqslant t(n)$ (para $n \geqslant 3$) se encontrará a la derecha de la palabra P_{n-2}.

2) Construir una máquina que tenga las mismas propiedades y que tenga el conjunto $\{0, 1\}$ en calidad de alfabeto exterior.

3) Demostrar que si en el programa de la máquina de Turing no se encuentra el símbolo L (pero, naturalmente, pueden encontrarse los símbolos S y R), entonces esta máquina comenzando su funcionamiento desde una cinta vacía no puede construir un prefijo de ilimitada longitud de la palabra $11010^2 10^3 1 \ldots 0^n 10^{n+1} 1 \ldots$

1.7. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T (en el alfabeto A) existe una cantidad numerable de máquinas equivalentes a ella $T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ (en el alfabeto A) que se diferencian una de otra por sus programas.

1.8. Sea $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ cierto alfabeto que contiene no menos de dos letras. Codificaremos sus letras de la manera siguiente: el código del símbolo a_i es la palabra $10^{i+1}1$ en el alfabeto $\{0, 1\}$. En concordancia con esta codificación el código de la palabra arbitraria $P = a_{i_1}, a_{i_2} \ldots a_{i_s}$ $(s \geqslant 1)$ en el alfabeto A tendrá la forma $10^{i_1+1}110^{i_2+1}1 \ldots 10^{i_s+1}1$. Demostrar que cualquiera que sea la máquina de Turing T con el alfabeto exterior A, existe una máquina de Turing T_0 con el alfabeto exterior $\{0, 1\}$ que satisface la condición: con cualquier palabra P (en el alfabeto A) la máquina T_0 es aplicable al código de esta palabra si, y sólo si, la máquina T es aplicable a la palabra P, con la particularidad de que si $T(P)$ está definido, entonces el código de la palabra $T(P)$ coincide con la palabra que es resultado de la aplicación de la máquina T_0 al código de la palabra P.

1.9. Construir una composición T_1T_2 de las máquinas de Turing T_1 y T_2 (por el par de estados (q_{10}, q_{21})) y hallar el resultado de la aplicación de la composición T_1T_2 a la palabra P (q_{20} es el estado conclusivo de la máquina T_2)

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{12}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1R$	$q_{21}1R$
1	$q_{21}0L$	$q_{20}1S$

a) $P = 1^3 0^2 1^2$, b) $P = 1^4 01$.

2) T_1:

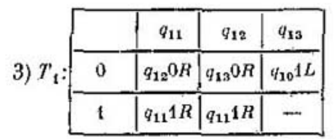
	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{10}0L$	$q_{13}0R$	$q_{11}0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1L$	$q_{20}0R$
1	$q_{22}1L$	$q_{21}0L$

a) $P = 1^4 0^2 1^3 0 1^2$, b) $P = 1^2 0101^3$.

3) T_1:



	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q_{13}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{11}1R$	$q_{11}1R$	—

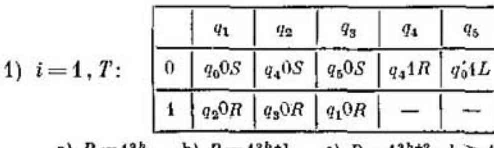
T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{23}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$	$q_{23}1L$

a) $P = 1^2 0 1^3 0 1^2$, b) $P = 1^2 0 1^2 0^2 1^2$.

1.10. Hallar el resultado de la aplicación de la iteración de máquinas T (por el par de estados (q_0, q_i)) a la palabra P (los estados conclusivos son q_0 y q_0').

1) $i = 1$, T:



	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_0 0S$	$q_4 0S$	$q_5 0S$	$q_4 1R$	$q_0' 1L$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_1 0R$	—	—

a) $P = 1^{3k}$, b) $P = 1^{3k+1}$, c) $P = 1^{3k+2}$, $k \geqslant 1$.

2) $i = 1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_0' 0R$	$q_0' 0R$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_0 0R$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_6 1L$	$q_6 1L$

a) $P = 1^{2x}$, b) $P = 1^{2x+1}$, $x \geqslant 1$.

3) $i = 3$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_2 0L$	—	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_0' 0R$
1	$q_1 2R$	$q_2 1R$	—	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$
2	—	$q_3 1R$	—	—	—	$q_0 1R$

$P = 1^x 0 1^y$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1)$.

1.11. Hallar el resultado de la aplicación de la máquina $T = T(T_1(q_{10}', q_{21}),\ T_2(q_{10}'', q_{31}),\ T_3)$ a palabra P (q_{20} es el estado conclusivo de la máquina T_2 y q_{30}, el de la máquina T_3).

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}'0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{10}''1L$

T_2:

	q_{21}
0	$q_{20}1S$
1	$q_{21}0R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1L$	$q_{30}1L$
1	$q_{31}1L$	—

a) $P = 1 0 1^3$. b) $P = 1^3 0 1$.

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0L$	$q''_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{13}1R$	$q_{13}1R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	$q_{31}1R$

a) $P = 1^x0^21$ $(x \geqslant 1)$,

b) $P = 1^x0101^y01^z$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1)$.

1.12. Empleando las máquinas T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 construir un esquema de operadores del algoritmo $\mathfrak{A}$ (aquí q'_{10}, q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40} y q_{50} son los estados conclusivos de las máquinas correspondientes).

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}0R$
1	$q'_{10}0R$	$q_{11}1S$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}0S$
1	$q_{21}1R$	$q_{22}1R$	$q_{23}1R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	—

T_4:

	q_{41}	q_{42}	q_{43}
0	$q_{42}0L$	$q_{43}0L$	$q_{40}0R$
1	$q_{41}1L$	$q_{42}1L$	$q_{43}1L$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}1S$
1	$q_{51}1R$

1) $\mathfrak{A} : q_1 1^x \models q_0 1^{2x}$ $(x \geqslant 1)$,

2) $\mathfrak{A} : q_1 1^{x+1} \models q_0 1^{3x}$ $(x \geqslant 0)$,

3) $\mathfrak{A} : W0q_1 1^{x+1} \models W0q_0 1^{2x+1}$ $(x \geqslant 0)$.

Observación. Si $x = 0$, entonces 1^x se considera palabra vacía.

1.13. En base al esquema de operadores del algoritmo $\mathfrak{A}$ y de la descripción de las máquinas que entran en el esquema del algoritmo, construir el esquema de máquina y hallar el resultado de la aplicación de la máquina, dada con este esquema, a la palabra P.

1) $\mathfrak{A} = \alpha T_1 \underset{1}{\lrcorner} T_2 T_3 \underset{1}{\underline{|\, q_{30}\omega}}$,

T_1:

	q_{11}
0	$q_{10}0L$
1	$q_{11}2R$
2	—

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}1L$
1	$q_{21}1R$	—	$q_{23}1R$
2	$q_{22}1R$	—	—

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0L$	$q'_{30}0R$
1	$q_{31}1L$	$q_{32}1L$
2	—	$q_{30}1R$

$$P = 1^x01^y \ (x \geqslant 1, \ y \geqslant 1).$$

(Los estados iniciales de las máquinas son q_{11}, q_{21} y q_{31}, y los conclusivos son q_{10}, q_{20}, q_{30} y q'_{30}.)

2) $\mathfrak{A} = \alpha \underset{2}{\rfloor} T_1 T_2 \underset{1}{\underline{|\,q_{20}}} T_3 \underset{2}{\underline{|\,q_{30}}} \underset{1}{\rfloor} \omega$

T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}
0	—	$q_{13}0R$	$q_{14}0L$	—
1	$q_{12}0R$	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{10}0L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}1S$	$q_{20}1S$
1	$q'_{20}1S$	$q_{23}1L$	$q_{23}1L$

T_3:

	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}
0	$q_{32}0L$	$q_{33}0R$	$q'_{30}1S$	$q_{30}1R$
1	$q_{31}1L$	$q_{34}1L$	—	$q_{34}1L$

$$P = 1^x0^21^y \ (x \geqslant 1, \ y \geqslant 1).$$

(Los estados iniciales de las máquinas son q_{11}, q_{21} y q_{31}, y los conclusivos son q_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30} y q'_{30}.)

1.14. Construir una máquina de Turing que calcule la función f.

1) $f(x)=\text{sg}\, x=\begin{cases} 0, & \text{si } x=0, \\ 1, & \text{si } x\geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases} 1, & \text{si } x=1, \\ 0, & \text{si } x\geqslant 2. \\ \text{por definición} & \text{si } x=0; \end{cases}$

3) $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]=m$, si $x=2m$ o $x=2m+1$, $m\geqslant 0$;

4) $f(x, y)=x \dot{-} y=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant y; \\ x-y, & \text{si } x>y; \end{cases}$

5) $f(x, y)=x-y$;

6) $f(x, y)=\frac{4-x}{y^2}$.

OBSERVACIÓN. Aquí (y en lo sucesivo) en la presentación «analítica» de las funciones numéricas se emplean con frecuencia las funciones «elementales» ampliamente conocidas (del análisis matemático). En esto existe la particularidad de que la presentación «analítica» de la función se considera *determinada* solamente en tales colecciones de valores de las variables en números enteros (pertenecientes a la serie natural N) en las que *están determinadas y toman valores enteros no negativos todas las funciones «elementales»* que entran en la «presentación formular» de la función definida. Por ejemplo, la función $\frac{x^2}{3-\frac{y}{2}}$ estará definida si, y sólo si, $\frac{y}{2}$ es un número entero no negativo, $3-\frac{y}{2}$ es un número entero positivo y $\frac{x^2}{3-\frac{y}{2}}$ es un número entero no negativo.

Se dice que la máquina de Turing T *calcula correctamente la función* $f(\tilde{x}^n)$ si:

1) en el caso de que $f(\tilde{\alpha}^n)$ esté determinada, $T(k(\tilde{\alpha}^n)) = k(f(\tilde{\alpha}^n))$ y el cabezal de la máquina en la configuración conclusiva observa la unidad izquierda del código $k(f(\tilde{\alpha}^n))$;

2) en el caso de que $f(\tilde{\alpha}^n)$ no esté determinada, la máquina T comenzando su funcionamiento desde la unidad izquierda del código $k(\tilde{\alpha}^n)$ no se detiene.

1.15. Demostrar que para cualquier función calculable existe una máquina de Turing que computa correctamente esta función.

1.16. Construir una máquina de Turing que calcule correctamente la función f.

1) $f(x)=x \dot{-} 1$;

2) $f(x)=\overline{\text{sg}}\, x=1-\text{sg}\, x$;

3) $f(x)=\frac{1}{x-2}$;

4) $f(x, y)=x+y$;

5) $f(x, y)=\frac{x}{2-y}$.

1.17. Escribir por el programa de la máquina de Turing T una expresión analítica para las funciones $f(x)$ y $f(x, y)$ computadas por la máquina T. (Siempre en calidad de estado inicial se toma q_1 y en calidad de estado conclusivo, q_0.)

1) T:

	q_1	q_2
0	$q_{21}1L$	$q_0 0R$
1	$q_1 1R$	$q_2 1L$

2) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_2 0R$	$q_1 0L$	$q_4 0L$	$q_4 0L$	$q_0 0R$
1	$q_1 1R$	$q_3 0R$	$q_3 0R$	$q_5 1L$	$q_5 1L$

3) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
0	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_0 1S$	$q_5 0R$	$q_3 0L$	$q_7 0L$	—	$q_9 0L$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_4 1R$	$q_3 1L$	$q_4 1R$	$q_6 1R$	$q_6 1R$	$q_8 0L$	$q_8 1L$	$q_9 1L$

1.18. ¿Qué funciones de un lugar se calculan con todas las máquinas de Turing (en el alfabeto $\{0, 1\}$), cuyos programas contienen sólo una instrucción?

1.19. ¿ Es justa la afirmación: dos funciones calculables diferentes $f_1(\widetilde{x}^m)$ y $f_2(\widetilde{x}^n)$ se pueden calcular en una máquina de Turing si, y sólo si, $m \neq n$?

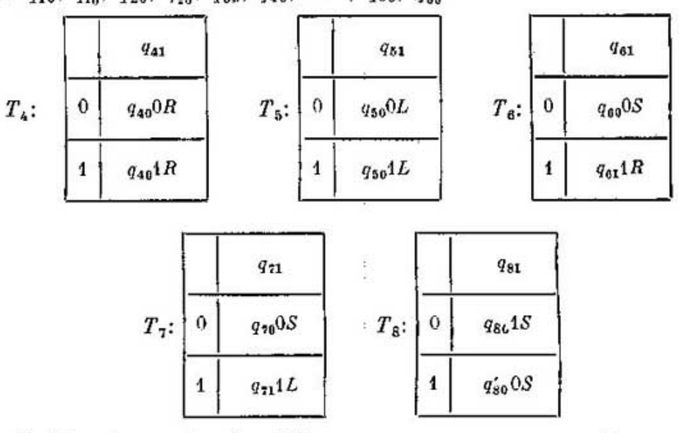
1.20. Sea M un conjunto numerable de algunas funciones calculables y $T(M)$ el conjunto mínimo posible de máquinas de Turing, tales que para cualquier función f de M existe una máquina en el conjunto $T(M)$ que calcula la función f.

1) Mostrar que si para cierto $n \geqslant 1$ existe en el conjunto M un subconjunto infinito compuesto de funciones de n lugares, entonces en $T(M)$ habrá una máquina con un número tan grande como se quiera de estados (o sea que para todo $l_0 \geqslant 1$ se puede encontrar en $T(M)$ una máquina con el número de estados mayor que l_0).

2) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente de la finitud del conjunto $T(M)$?

1.21. Construir un esquema de operadores de la máquina de Turing que calcula la función f; en calidad de operadores elementales emplee las máquinas T_i ($i = 4, 5, 6, 7, 8$). En los problemas 1) y 2), primero construya el esquema de operadores utilizando sólo las máquinas T_1, T_2, T_3, y después represente cada una de las máquinas T_1, T_2, T_3 con un esquema de operadores empleando las

máquinas T_4, T_5, . . ., T_8. Los estados iniciales en las máquinas que se examinan aquí son: q_{11}, q_{21}, . . ., q_{81}, y los estados conclusivos: q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30}, q_{40}, . . ., q_{80}, q'_{80}.



T_4:

	q_{41}
0	$q_{40}0R$
1	$q_{40}1R$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}0L$
1	$q_{50}1L$

T_6:

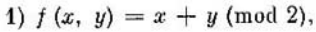
	q_{61}
0	$q_{60}0S$
1	$q_{61}1R$

T_7:

	q_{71}
0	$q_{70}0S$
1	$q_{71}1L$

T_8:

	q_{81}
0	$q_{80}1S$
1	$q'_{80}0S$



1) $f(x, y) = x + y \pmod 2$,

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}1L$	$q_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{12}1L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}1L$	$q_{23}0L$	$q_{20}1S$
1	$q_{22}0L$	$q_{21}0L$	—

T_3:

	q_{31}
0	$q_{30}0L$
1	$q_{31}1R$

2) $f(x) = 2^x$,

$$T_1 : \begin{cases} q_{11}1 \vdash q_{10}1^2, \\ q_{11}1^{x+1} \vdash 101^x0q'_{10}1^2 \text{ con } x > 0; \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} 1^x010^tq_{21}1^y \vdash q_{20}1^y, \\ 1^x0^{z+1}10^tq_{21}1^y \vdash 1^{x+1}01^z0^tq'_{20}1^y \text{ con } z > 0; \end{cases}$$

aquí $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$.

$$T_3 : W0q_{31}1^{y+1} \vdash W0q_{30}1^{2y+1}, \quad y \geqslant 0;$$

3) $f(x) = 3x$;
4) $f(x, y) = x \cdot y$;
5) $f(x, y) = x - y$.

La *distancia entre dos células* C y C' de la cinta es igual al número de células que se encuentran entre C y C' más una. En particular, las células vecinas de la cinta se encuentran una de otra a la distan-

cia de 1. Sea l un número positivo entero. El subconjunto de todas las células de la cinta tales que cada dos de ellas están colocadas una de otra a una distancia múltiple de l, se llama *retículo con el paso l*. Así que la cinta puede ser vista como la unión del retículo l con el paso l. Sea $R_{(l)}$ un retículo con el paso l. Dos células de este retículo se llamarán *vecinas* si la distancia entre ellas (examinándola con relación a toda la cinta) es igual a l. Se dice que la *palabra $P = a_1a_2 \ldots a_m$ está escrita en el retículo $R_{(l)}$* si:

1) el símbolo a_1 está escrito en cierta célula C_1 de este retículo;

2) el símbolo a_2 está escrito en la célula C_2 que es vecina a la C_1 en el retículo $R_{(l)}$ y está colocada a la derecha de la célula C_1, etc.;

m) el símbolo a_m está escrito en la célula C_m que está a la distancia $(m-1)\cdot l$ de la célula C_1 y a la derecha de ella[1]).

Diremos que la *máquina de Turing T_1 simula la máquina de Turing T en el retículo $R_{(l)}$* (con el paso l) si cualquiera que sea la palabra P (en el alfabeto A) se cumple la condición siguiente: supongamos que en el retículo $R_{(l)}$ está escrita la palabra P y en el momento inicial el cabezal de la máquina T_1 observa la letra que está más a la izquierda de la palabra P; la máquina T_1 se detiene si, y sólo si, la máquina T es aplicable a la palabra P; con la particularidad de que si $T(P)$ está determinada, entonces después de la terminación del trabajo de la máquina T_1, en el retículo $R_{(l)}$ estará escrita la palabra $T(P)$.

1.22. Simular el trabajo de la máquina T, que calcula la función f, en un retículo con paso l.

1) $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right],\ l=4;$

2) $f(x, y)=\frac{\operatorname{sg} x}{y},\ l=3;$

3) $f(x, y) = x + y,\quad l = 3;$

1.23. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T y cualquier número entero $l \geqslant 2$, existe una máquina T' que simula la máquina T en un retículo con paso l.

Llamaremos código *l-múltiple de la colección $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$* a la palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ que tiene la forma

$$1^{l(\alpha_1+1)}0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l \ldots 0^l1^{l(\alpha_n+1)} \quad (l \geqslant 2).$$

1.24. 1) Demostrar que la máquina que transforma el código básico de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en un código l-múltiple de esta colección $(l \geqslant 2)$ se puede presentar con el esquema de operadores siguiente:

$$\alpha T_1 \underset{1}{\lrcorner} T_2 \,|\, \underset{1}{\underline{q'_{20}\omega}},$$

[1]) Consideremos que fuera de las células $C_1, C_2, \ldots, C_m$ en el retículo $R_{(l)}$ hay sólo símbolos vacíos del alfabeto exterior.

donde:

a) T_1 tiene el estado inicial q_{11}, el estado de conclusión q_{10} y
$$q_{11}1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0\dots 01^{\alpha n+1} \vdash q_{10}1^{\alpha_1+1}0^2 1^{\alpha_2+1}01^{\alpha_3+1}0\dots$$
$$\dots 01^{\alpha n+1}0^{l+1}1^l;$$

b) T_2 tiene el estado inicial q_{21}, dos estados conclusivos q_{20} y q'_{20} y
$$q_{21}1^{x+1}0^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\dots$$
$$\dots 01^{\alpha n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots$$
$$\dots 0^l 1^{l(\alpha_i+1-x} \vdash q'_{20}1^x 0^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\dots$$
$$\dots 01^{\alpha n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^{l+1}1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots 0^l 1^{l(\alpha_i+2-x)} \text{ con } x>0,$$
$$q_{21}10^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\dots 01^{\alpha n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l\dots$$
$$\dots 0^l 1^{l(\alpha_i+1)} \vdash q'_{20}1^{\alpha_{i+1}+1}0)^2 1^{\alpha_{i+2}+1}01^{\alpha_{i+3}+1}0\dots$$
$$\dots 01^{\alpha n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l\dots 0^l 1^{l(\alpha_i+1)}0^l 1^l,$$
$$q_{21}10^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots$$
$$\dots 0^l 1^{l(\alpha n+1)} \vdash q_{20}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots 0^l 1^{l(\alpha n+1)}.$$

2) Construir los programas de las máquinas T_3, T_4, . . ., T_{11} por su descripción oral.

T_3—la máquina al comenzar su funcionamiento desde la última unidad del grupo de unidades la «mueve» una célula a la izquierda (sin cambiar «el contenido restante» de la cinta[1]); el cabezal se detiene en la primera unidad del grupo de unidades «trasladado»;

T_4—con un $l \geqslant 4$ dado, al comenzar el funcionamiento desde una célula arbitraria que contiene una unidad, el cabezal de la máquina se mueve hacia la derecha hasta que pase por todo un grupo de $l+1$ ceros; el cabezal se para en la primera célula después de este grupo y anota en ella el 1;

T_5—con un $l \geqslant 1$ dado, el cabezal de la máquina al comenzar su funcionamiento desde cierta célula y moviéndose hacia la derecha consecutivamente pone l unidades y se detiene en la última de ellas;

T_6— la máquina comienza su funcionamiento desde la célula no vacía que está más a la izquierda; con un $l \geqslant 1$ dado «se busca» el primer grupo de $l+1$ ceros que esté a la izquierda y el cabezal se para en el último de estos ceros («el contenido del trozo inicial de la cinta» no se cambia);

T_7— comenzando su funcionamiento desde la célula no vacía que está más a la izquierda, la máquina busca la unidad limítrofe por el lado izquierdo al primer grupo de tres ceros de la izquierda

[1]) Con otras palabras, consideramos que no ha aparecido ni una sola «nueva» unidad y que los cambios en el trozo inicial de la cinta *sólo* han influido en el grupo indicado.

«rebordeado» de unidades; el cabezal se detiene en la unidad encontrada («el contenido del trozo inicial de la cinta» no se cambia);

T_8— en la célula inicial se anota 0 y el cabezal, después de moverse una célula hacia la izquierda, se detiene;

T_9—el cabezal se mueve dos células hacia la derecha desde la célula «inicial» y la máquina se detiene en el estado q_{90} si la célula nueva contiene el símbolo 0, y en el estado q'_{90} si en la célula «nueva» hay un 1 (el contenido de la cinta queda como antes);

T_{10}— el cabezal se mueve una célula a la izquierda (después de esto la máquina se detiene; no se hace ningún cambio en la cinta);

T_{11}— el cabezal comienza a moverse hacia la derecha desde cierta célula «inicial» y «encuentra» la primera (en este movimiento) unidad, haciendo otro paso más se para en la célula que está a la derecha de la unidad «encontrada»[1]) (el contenido de la cinta no se cambia).

3) Construir, tomando en calidad de máquinas iniciales T_3, T_4, . . ., T_{11}, un esquema operador para las máquinas T_1 y T_2 y para la máquina que transforma el código básico de la colección en l-múltiple.

1.25. Construir un esquema operador de una máquina de Turing que transforme el código l-múltiple de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en el código básico de esta colección. En calidad de máquinas iniciales correspondientes a los operadores elementales emplee las máquinas T_4, T_5, ..., T_8 del problema 1.21 y además tres máquinas así:

T_1— con la $l \geqslant 1$ dada, el cabezal de la máquina moviéndose por la derecha de alguna célula vacía encuentra el primer (en esta dirección del movimiento del cabezal) grupo que contiene no menos de l unidades, después en este grupo borra las primeras l unidades y se detiene en la célula en la que estaba la última unidad borrada («el resto del contenido» de la cinta no se cambia);

T_2— el cabezal de la «posición inicial» se mueve hacia la izquierda l células (el número l está dado), después de esto la máquina se para en la l-ésima célula. Al hacer esto el contenido de la cinta no se cambia;

T_3— funciona en forma análoga a la máquina T_2 pero el «movimiento» se hace hacia la derecha.

Código reticulado de la colección $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se llama a una palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ anotada en n retículos con un paso n y con la particularidad de que en el primer retículo estará anotada la palabra 1^{α_1+1}, en el segundo, la palabra 1^{α_2+1}, etc., y en el n-ésimo, la palabra 1^{α_n+1}; los comienzos de las palabras en los retículos tienen que estar *concordados* o sea que la unidad que está más a la izquierda en el primer retículo inmediatamente precede (en la cinta) a la unidad que está más a la izquierda en el segundo

---

[1]) Si en la célula «inicial» está escrita una unidad, entonces el cabezal se para en la célula vecina de la derecha.

retículo, y esta unidad inmediatamente precede a la unidad más izquierda del tercer retículo, etc.

1.26. 1) Construir un esquema operador de una máquina de Turing que transforma el código básico de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en un código de retículo de esta colección. En calidad de máquinas iniciales que corresponden a los operadores elementales emplee las máquinas T_4, T_5, . . ., T_8 del problema 1.21 y además dos máquinas:

T_1— el cabezal de la «posición inicial» se mueve n células a la derecha y después de eso se detiene (en la n-ésima célula); el contenido de la cinta no se cambia;

T_2— funciona en forma análoga a la máquina T_1 pero el cabezal se mueve hacia la izquierda.

2) Construir, empleando la misma máquina que en el problema anterior, un esquema operador de una máquina de Turing que transforme un código de retículo de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en código básico de esta colección.

§ 2. CLASES DE FUNCIONES CALCULABLES Y RECURSIVAS

Las funciones que se examinan en este párrafo son funciones numerales parciales.

La función $F(x_1, \ldots, x_n)=f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ se llama *superposición de la función* f y $g_1, \ldots, g_m$ y se designa por $S(f^{(m)}; g_1^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)})$. Aquí la función F estará definida en la colección $\widetilde{\alpha}^n$, y $F(\widetilde{\alpha}^n) = f(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\widetilde{\alpha}^n))$ si, y sólo si, cada función g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ está definida en la colección $\widetilde{\alpha}^n$ y, además, la función f está definida en la colección $(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\alpha^n))$.

Sean $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ cualesquiera dos funciones con $n \geqslant 2$. Definiremos la tercera función $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ mediante el esquema siguiente:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) = \\ = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)), \quad y \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

El esquema (1) se llama *esquema de recursión primitiva* para la función $f(\widetilde{x}^n)$ *por las variables* x_n y x_{n+1} y representa la *descripción recursiva primitiva de la función* $f(\widetilde{x}^n)$ con la ayuda de las funciones g y h. Se dice también que la *función* f *está obtenida de las funciones* g *y* h *con ayuda de la operación de recursión primitiva por las variables* x_n y x_{n+1}. En este caso emplean también la designación $f = R(g, h)$ (e indican aparte por qué variables se hace la recursión).

Al presentar la descripción recursiva primitiva de la función $f(x)$ dependiente de una variable, el esquema de la recursión primitiva tiene la forma

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(y+1) = h(y, f(y)), \; y \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde a es una constante (un número de la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Sea $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$ cierta función. Determinaremos la función $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de la manera siguiente: sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ una colección arbitraria de números enteros no negativos; estudiemos la ecuación

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y) = \alpha_n, \tag{3}$$

a) si la ecuación (3) tiene la solución $y_0 \in N$ y con todas las $y \in N$ tales que $0 \leqslant y < y_0$, la función $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y)$ está definida y sus valores son diferentes de α_n, entonces suponemos que $g(\widetilde{\alpha}) = y_0$;

b) si la ecuación (3) no tiene solución en números enteros no negativos, entonces consideramos que $g(\widetilde{\alpha})$ no está definida;

c) si y_0 es el menor número no negativo de la solución de la ecuación (3) y con cierto $y_1 \in N$ y un menor y_0 el valor de $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y_1)$ no está determinado, entonces suponemos: $g(\widetilde{\alpha})$ no está definido.

Sobre la función $g(\widetilde{x}^n)$, construida de la manera indicada a base de la función $f(\widetilde{x}^n)$, se dice que *ha sido obtenida de la función* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ *mediante la operación con la que se minimiza por la variable* x_n (o abreviadamente: *minimizando por* x_n). En este caso se emplean las siguientes designaciones: $g = Mf$, o $g(\widetilde{x}^n) = M_{x_n}(f(\widetilde{x}^n))$, o $g(\widetilde{x}^n) = \mu_y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$, o $g(\widetilde{x}^n) = \mu_{x_n}(f(\widetilde{x}^n))$.

OBSERVACIÓN. La operación de recursión primitiva y de minimizar se puede aplicar por cualesquiera variables que entran en las funciones f, g y h (pero siempre hay que indicar por cuáles variables se hacen estas operaciones).

En adelante denominaremos *simplísimas* a las siguientes funciones:

a) $s(x) = x + 1$, *función de sucesión*;

b) $o(x) \equiv 0$, *función nula*;

c) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n;\; n = 1, 2, \ldots)$ *función de selección o función de elección del argumento.*

La *clase* K_{pr} *de todas las funciones primitivamente recursivas* representa en sí el conjunto de todas las funciones que pueden ser obtenidas de las funciones simplísimas mediante las operaciones de superposición y de recursión primitiva.

Se llama *clase* K_{rp} *de todas las funciones parcialmente recursivas* al conjunto de todas las funciones que pueden ser obtenidas de las funciones simplísimas mediante las operaciones de superposición, de recursión primitiva y minimización.

OBSERVACIÓN. Al definir las clases K_{pr} y K_{rp} se supone que en la construcción de cada función concreta las operaciones correspondientes se emplean no más de un número finito de veces (ciertas o todas las operaciones pueden no utilizarse ni una vez).

La *clase* K_{rg} *de todas las funciones recursivas generales* representa en sí el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas siempre determinadas.

No es difícil mostrar que $K_{rp} \supset K_{rg}$ (¡la inclusión es rigurosa!). También es justa la siguiente inclusión rigurosa: $K_{rg} \supset K_{pr}$.

Por K_c designaremos la *clase de todas las funciones numéricas parciales computables en las máquinas de Turing*.

Es justa la afirmación siguiente: las clases K_{rp} y K_c coinciden.

TEOREMA (R. Robinson). *Todas las funciones primitivamente recursivas de un lugar, y solamente ellas, pueden ser obtenidas de las funciones* $x+1$ *y* $\overline{sg}\,(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$ *mediante una utilización finito-múltiple de las tres operaciones siguientes*:

a) *diferencia absoluta* $f(x) = |f_1(x) - f_2(x)|$;

b) *composición* $f(x) = f_1(f_2(x))$;

c) *iteración* $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f_1(f(x)). \end{cases}$

2.1. Aplicar la operación de recursión primitiva a las funciones $g(x_1)$ y $h(x_1, x_2, x_3)$ por las variables x_2 y x_3. Anotar la función $f(x_1, x_2) = R(g, h)$ en forma «analítica».

1) $g(x_1) = x_1,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$;

2) $g(x_1) = x_1,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$;

3) $g(x_1) = 2^{x_1},\ h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$ (suponemos $0^0 = 1$);

4) $g(x_1) = 1,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_3(1 + \mathrm{sg}\,|x_1 + 2 - 2 - 2x_3|)$;

5) $g(x_1) = x_1,\ h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\,\mathrm{sg}\left(1 + \frac{x_3}{3}\right)$.

2.2. Demostrar la recursividad primitiva de la función $f(\tilde{x}^n)$.

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2^2$;

2) $f(x_1) = 3^{x_1}$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 \oplus x_3$ (suma por el módulo 2).

2.3. Demostrar que la relación $f = R(g, h)$ es válida.

1) $f(x_1, x_2) = \mathrm{rest}\,(x_1, x_2) =$

$$= \begin{cases} x_1, & \text{si } x_2 = 0, \\ \text{resto de la división de } x_1 \text{ por } x_2, & \text{si } x_2 > 0; \end{cases}$$

$$g(x_2) = 0,\ h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\,\mathrm{sg}\,|x_2 - (x_3 + 1)|,$$

la recursión se hace por las variables x_1, x_3.

2) $f(x_1, x_3) = \left[\frac{x_1}{x_2}\right] =$

$$= \begin{cases} x_1, & \text{si } x_2 = 0, \\ \text{la parte entera de la división de } x_1 \text{ por } x_2, & \text{si } x_2 > 0; \end{cases}$$

$g(x_2) = 0,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \overline{\text{sg}}\,|x_1 + 1 - (x_3 + 1)x_2| + \overline{\text{sg}}\,x_2,$

la recursión se hace por las variables x_1, x_3.

3) $f(x_1) = x_1 \dot{-} [\sqrt{x_1}]^2,$
$g = 0,\ h(x_1, x_2) = (x_2 + 1)\,\text{sg}\,(4x_1 \dot{-} (x_2^2 + 4x_2)).$

4) $f(x_1) = [\sqrt{x_1}],$
$g = 0,\ h(x_1, x_2) = x_2 + \overline{\text{sg}}\,((x_2 + 1)^2 \dot{-} (x_1 + 1)).$

2.4. Mostrar que si las funciones $g(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ y $\varphi_3(x)$ son primitivamente recursivas, entonces la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ si } g(y) \leqslant a; \\ \varphi_2(x), \text{ si } a < g(y) \leqslant b, \\ \varphi_3(x), \text{ si } g(y) > b, \end{cases}$$

donde $0 \leqslant a \leqslant b$ también es primitivamente recursiva[1]).

2.5. Sean $g_1(y)$, $g_2(x)$ y $g_3(x, y)$ funciones primitivamente recursivas. Demostrar que entonces $f(x, y)$, determinada con el esquema que se expone a continuación, también es primitivamente recursiva:

$$\begin{cases} f(0, y) = g_1(y), \\ f(x + 1, 0) = g_2(x), \\ f(x + 1, y + 1) = g(x, y) \end{cases}$$

(aquí $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$).

2.6. Sean las funciones $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ y $h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$, primitivamente recursivas. Demostrar que entonces también serán primitivamente recursivas las funciones siguientes:

1) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i);$

2) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} g(x_1 \ldots, x_{n-1}, i);$

3) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \sum_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{con } y \leqslant z, \\ 0 & \text{con } y > z; \end{cases}$

---

[1]) La condición que se pone sobre la función $g(y)$ se debe entender así: se examinan todos los valores de y con los que la función $g(y)$ satisface la relación indicada.

4) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \prod_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{con } y \leqslant z, \\ 1 & \text{con } y > z; \end{cases}$

5) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

(aquí, como es habitual, se considera que si el límite superior de la suma es menor que el inferior, entonces la suma es igual a 0);

6) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

(en el caso de que el límite superior de la multiplicación es menor que el inferior, el producto se supone igual a 1).

2.7. Aplicar la operación de minimización a la función f por la variable x_i. Presentar la función que resulte en forma «analítica».

1) $f(x_1) = 3,\ i = 1$;

2) $f(x_1) = \left[\frac{x_1}{2}\right],\quad i = 1$;

3) $f(x_1, x_2) = I_1^2(x_1, x_2),\ i = 2$;

4) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2,\ i = 1, 2$;

5) $f(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{x_2},\quad i = 1, 2$;

6) $f(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1),\quad i = 1, 2.$

2.8. Demostrar, aplicando la operación de minimización a la función adecuada primitivamente recursiva, que esta función f es parcialmente recursiva.

1) $f(x_1) = 2 - x_1$;

2) $f(x_1) = \frac{x_1}{2}$;

3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$;

4) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_1 x_2}$.

2.9. ¿Es justa la afirmación siguiente: si aunque sea una de las funciones g y h no es determinada en todas partes, entonces $f = R(g, h) \notin K_{\text{rg}}$?

2.10. 1) ¿Se puede obtener una función nunca indeterminada mediante la aplicación en una vez de la operación de minimización a una función siempre determinada?

2) Formular un ejemplo de una función primitivamente recursiva de la cual se puede obtener, aplicando dos veces la operación de minimización, una función nunca indeterminada.

2.11. Demostrar la computabilidad de las funciones siguientes:

1) $f(x, y, z) = \left[\frac{2}{x+1}\right](x - \overline{\text{sg}}(2^x \dot{-} y)) \dot{-} (x+1)^z$;

2) $f(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x-1} + 2^{[x/2]}\right)(y^2 \dot{-} xz)$;

3) $f(x, y, z) = 4^{x^2 \dot{-} y^2} - (x^2+1)^{z \dot{-} 1}$;

4) $f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{n+1} \cdot 2^{(x^2+y)\,\overline{\text{sg}}\,(x \dot{-} yz)}$.

2.12. ¿Qué potencia tienen las clases K_{pr}, K_{rg}, K_{rp} y K_c? La función $\varphi(x, y)$, definida con el esquema

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = y + 1, \\ \varphi(x+1, 0) = \varphi(x, 1), \\ \varphi(x+1, y+1) = \varphi(x, \varphi(x+1, y)). \end{cases}$$

donde $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ usualmente se llama *función de Ackermann*.

2.13. Mostrar que la función de Ackermann satisface las condiciones siguientes:

a) $\varphi(x, y) > y$, con cualesquiera x e y;
b) $\varphi(x, y)$ es rigurosamente monótona por las dos variables;
c) $\varphi(x+1, y) \geqslant \varphi(x, y+1)$, con cualesquiera x e y.

2.14. Empleando el problema 2.13 y el teorema de R. Robinson (sobre que el sistema $\{x+1, \overline{\text{sg}}\,(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)\}$ es completo respecto a las operaciones de composición, iteración y diferencia absoluta en la clase de funciones de un lugar primitivamente recursivas), demostrar que cualesquiera que fuese la función de un lugar primitivamente recursiva $f(y)$ se encontrará un x tal, para el cual $f(y) < \varphi(x, y)$ con cualquier valor de la variable y.

2.15. Mostrar que la función de Ackermann es recursiva general y no es primitivamente recursiva.

2.16*. Designaremos por $K_{pr}^{(1)}$ y $K_{rg}^{(1)}$ el conjunto de todas las funciones de un lugar primitivamente recursivas y el conjunto de todas las funciones recursivas generales, respectivamente. Demostrar que el sistema $K_{pr}^{(1)} \cup \{x+y\}$ es completo respecto a la operación de superposición en la clase K_{pr} y el sistema $K_{rg}^{(1)} \cup \{x+y\}$ en la clase K_{rg}.

2.17. Supongamos que la máquina de Turing T calcula la función $f_1(x) \in K_{rg} \setminus K_{pr}$. ¿Es siempre cierto que la función $f_2(x, y)$ calculada en esta misma máquina no pertenece a K_{pr}?

2.18. 1) Supongamos que las máquinas de Turing T_1 y T_2 calculan las funciones primitivamente recursivas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente. ¿Es siempre cierto que la composición T_1T_2 también calcula cierta función recursiva primitiva $f(x)$? ¿Y en el caso de que las máquinas T_1 y T_2 calculen correctamente las funciones f_1 y f_2?

2) Supongamos que la máquina T calcula la función primitivamente recursiva $f(x)$. ¿Es siempre justa la afirmación siguiente: si la iteración de maquinas T calcula cierta función siempre determinada $g(x)$, entonces esta función forzosamente es primitivamente recursiva?

2.19. ¿Son válidas las relaciones siguientes?

1) $\mu_x (x \dot{-} 1) = (\mu_x (x \dot{-} 2)) \dot{-} 1$.

2) $\mu_{x_2} (x_1 + (x_2 \dot{-} x_1)) = \mu_{x_1} ((x_1 \dot{-} x_2) + x_2)$.

3) $\mu_x \left(x \dot{-} \left[\frac{x}{2} \right] \right) \in K_{\text{pr}}$.

4) $\mu_x (x \dot{-} [\sqrt{x}]^2) \in K_{\text{pr}}$.

5) $\mu_x ([\sqrt[3]{x^2}]) \in K_{\text{pr}}$.

2.20*. Supongamos que las funciones $f_1 (x)$ y $f_2 (x)$ pertenecen al conjunto $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Pueden ser justas las afirmaciones siguientes?

1) $f_1 (f_2 (x)) \in K_{\text{pr}}$, pero $f_2 (f_1 (x)) \notin K_{\text{pr}}$,

2) $f_1 (x^2) \in K_{\text{pr}}$, pero $[\sqrt{f_1 (x^2)}] \notin K_{\text{pr}}$.

3) $f_1 (x) + f_2 (x) \in K_{\text{pr}}$, pero $f_1 (x) + 2f_2 (x) \notin K_{\text{pr}}$.

2.21*. Sea $f (x) \in K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Son siempre válidas las relaciones siguientes?

1) $f (2x) \notin K_{\text{pr}}$.
2) $f (x + y) \in K_{\text{pr}}$,
3) $f (x \cdot y) \notin K_{\text{pr}}$.
4) $1 \dot{-} f (x) \notin K_{\text{pr}}$.
5) $f (x \dot{-} y) \in K_{\text{pr}}$.

2.22. Las dos variables de la función $f (x, y)$ de K_{rg} son sustanciales. Supongamos que $\mu_x f (x, y)$ y $\mu_y f (x, y)$ son funciones siempre determinadas. ¿Puede depender sustancialmente aunque sea una de estas dos funciones sólo de una variable?

2) La función $f (x, y) \in K_{\text{rg}}$ tiene una variable ficticia. ¿Puede, suponiendo además que es una función recursiva general, la función $\mu_x f (x, y)$ tener las dos variables sustanciales?

2.23. Formular las condiciones necesaria y suficiente para que la función $\mu_x f (x)$ sea nunca indeterminada.

2.24. 1) ¿Cuáles serán las condiciones necesaria y suficiente para el cumplimiento de la relación $\mu_x f (x) \in K_{\text{rg}}$?

2) ¿Puede ser aunque sea una de las funciones $\mu_x f (x, y)$ o $\mu_y f (x, y)$ recursiva general si $f (x, y) \in K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{rg}}$?

2.25*. Sea $f (x) \in K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Puede ser válida la relación $\mu_x f (x) \in K_{\text{pr}}$?

2.26. Se sabe que $f (x) \in K_{\text{rg}}$ y que $f (2x + 1) = f (x)$ y $f (2x) = f (x + 1)$ con todos los $x \geqslant 0$. ¿Es cierto que $f (x) \in K_{\text{pr}}$?

2.27. Aclarar si es completo el sistema $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$ con relación a la operación de superposición en la clase K_{rg}?

2.28. ¿Forma el conjunto M un sistema completo en la clase K_{rp} con relación a la colección de operaciones Θ?

1) $M = K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{pr}}$, $\quad \Theta = \{R, \mu\}$,
2) $M = K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{rg}}$, $\quad \Theta = \{S\}$.
3) $M = K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$, $\quad \Theta = \{S, \mu\}$.
4) $M = K_{\text{pr}}$, $\quad \Theta = \{\mu\}$.

2.29. Supongamos que la función recursiva general $f(x)$, tal que $f(N) = \{f(x): x \in N\}$, es un subconjunto infinito propio del conjunto N. Confirmar si se podrá cumplir con esta condición la igualdad siguiente:

$$[(K_{\text{rp}}^{(1)} \setminus K_{\text{rg}}^{(1)}) \cup \{f(x)\}] = K_{\text{rp}}^{(1)},$$

donde $K_{\text{rp}}^{(1)}$ y $K_{\text{rg}}^{(1)}$ son respectivamente los conjuntos de todas las funciones de un lugar parcialmente recursivas y de todas las funciones recursivas generales, y la clausura se toma respecto a las operaciones de superposición y de minimización.

§ 3. CALCULABILIDAD Y COMPLEJIDAD DE LOS CALCULOS

La función parcial $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se denomina *universal* para la familia $\mathcal{G}$ de funciones de n-lugares, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) para cada i $(i = 0, 1, \ldots)$ la función de n-lugares $F(i, x_1, \ldots, x_n)$, pertenece a $\mathcal{G}$;

b) para cada función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{G}$ existe tal número i, que para todos los valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$

$$F(i, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

La cantidad i se llama *número de la función* $f(x_1, \ldots, x_n)$, y la numeración de las funciones de la familia $\mathcal{G}$ obtenida de este modo, se llama *numeración que responde a la función universal* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Por el contrario, si es dada la numeración del sistema $\mathcal{G}$, o sea, si es dada cualquier aplicación φ: $i \to f_i$ de la serie natural en $\mathcal{G}$, entonces, la función $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ determinada por la fórmula

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f_{x_0}(x_1, \ldots, x_n),$$

es universal para $\mathcal{G}$. A cada función recursiva primitiva (parcial) $f(x_1, \ldots, x_n)$ se le puede cotejar el término que refleja el modo de expresión de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ mediante la función $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, $s(x) = x + 1$ y $o(x) \equiv 0$, con ayuda de las operaciones de superposición, de recursión primitiva (y de minimización). Numerando todos los términos, se puede obtener la numeración de todas las funciones recursivas primitivas (parciales). A una numeración de tal calidad se la suele llamar *guedeliana* (véase [20]). En adelante, consideraremos que se ha fijado alguna numeración guedeliana. Una función de n-lugares parcialmente recursiva, que tiene el número x en esta numeración, se indicará mediante $\varphi_x^{(n)}$. El superíndice se omitirá, si no se tienen otras indicaciones respecto al número de las variables de la función $\varphi_x^{(n)}$.

Son justas las siguientes afirmaciones.

TEOREMA 1 (sobre la función universal para el conjunto de todas las funciones primitivamente recursivas de n-lugares). *La clase de todas las funciones de n-lugares primitivamente recursivas, tiene una función universal recursiva-general.*

Esta función universal (correspondiente a la numeración guedeliana elegida) se indicará mediante $D(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

TEOREMA 2 (sobre la función universal). *Existe una función parcialmente recursiva $U(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, universal para el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas de n-lugares.*

El concepto de función universal se usa frecuentemente para efectuar demostraciones con ayuda de la llamada *«diagonalización»*. Puede servir de ejemplo la siguiente demostración de la existencia de la función recursiva-general, que no es primitivamente recursiva. Sea $D(x_0, x_1)$, una función universal para la clase de funciones primitivamente recursivas de un lugar. Del punto a) de la definición de función universal se deduce, que $D(x_0, x_1)$ está determinada en todas partes. Consideremos a $g(x) = D(x, x) + 1$. La función $g(x)$ no es primitivamente recursiva. En efecto, si $g(x)$ fuese primitivamente recursiva, entonces, para alguna j y para todas las x se cumpliría la igualdad $D(j, x) = g(x)$. Pero para $x = j$ esta igualdad se transforma en la relación contradictoria

$$D(j, j) = g(j) = D(j, j) + 1.$$

Un papel importante juega el llamado $(s - m - n)$-teorema, que pertenece a Klin.

TEOREMA 3. *Para cualesquiera $m, n \geqslant 1$ existe una función primitivamente recursiva $s^{(m+1)}$ tal, que para todas las x, $y_1, \ldots, y_m$*

$$\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \varphi^{(n)}_{s(x, y_1, \ldots, y_m)}(z_1, \ldots, z_n).$$

Sea T una máquina de Turing, y K, alguna configuración. La *complejidad temporal del proceso de cálculo* $t_T(K)$ se determina como el número de pasos que efectúa la máquina T al pasar de K a la configuración final, si T es aplicable a K. La función $t_T(K)$ no es determinada, si T no es aplicable a K. Se llama *zona del proceso de cálculo* a la parte mínima de la cinta, contenedora de todas las células de la cinta, que por lo menos integran parte de alguna de las configuraciones que se encuentran a lo largo del proceso de cálculo. La *capacidad de complejidad* $s_T(K)$ se define como el largo de la zona del proceso de cálculo con configuración inicial K, si T es aplicable a la configuración K. La función $s_T(K)$ no es determinada, si T no es aplicable a K. Mediante $\omega_T(K)$ se indica el número de cambios de direcciones del cabezal y por medio de $r_T(K)$, el número máximo de pasos del cabezal por la frontera entre dos células vecinas de la zona en el proceso de cálculo (el máximo se toma por todos los pares de células vecinas). Las funciones $\omega_T(K)$ y $r_T(K)$ no son determinadas, si T no es aplicable a K. Si en calidad de configuración K se toma la configuración inicial para la palabra P, entonces las funciones de complejidad se indican respectivamente por medio de

$t_T(P)$, $s_T(P)$, $\omega_T(P)$ y $r_T(P)$. Si q_T es una cierta función de complejidad, entonces $q_T(n) = \max\limits_{P:\lambda(P)\leqslant n} q_T(P)$.

3.1. Demostrar que la función, universal para las funciones primitivamente recursivas de un lugar

a) toma todos los valores;

b) toma cada valor un número infinito de veces.

3.2. Mostrar que en la numeración guedeliana, cada función primitivamente recursiva de un lugar tiene una cantidad calculable de números.

3.3. Demostrar que no existe ninguna función universal parcialmente recursiva para la familia de todas las funciones recursivas-generales de n-lugares.

3.4. Demostrar que existen funciones parciales numéricas, que no son parcialmente recursivas. Dar dos demostraciones, una de las cuales se base en la comparación de las potencias del conjunto de las funciones parcialmente recursivas y del conjunto de todas las funciones numéricas parciales, y la otra, en la «diagonalización».

3.5. Poner un ejemplo de función numérica parcial, que tome exactamente un valor y que no sea parcialmente recursiva.

3.6. Demostrar que la función f no es parcialmente recursiva.

1) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si el valor } \varphi_x(y) \text{ está determinado}, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(x) \text{ está determinado}, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(y), & \text{si } \varphi_x(y) \text{ está determinado}, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

4) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(y) = z, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

5) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } y, \text{ para el cual } \varphi_x(y) = z, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3.7. Aclalar si la función f es parcialmente recursiva o no.

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(x) = 1, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \text{indeterminada}, & \text{si } \varphi_x(x) \text{ es determinado}, \\ 1, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si la unidad pertenece al conjunto de valores de la función } \varphi_x, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x \text{ es primitivamente recursiva,} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si en la descomposición decimal del número } \pi \\ & \text{hay una cantidad infinita de ceros,} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3.8. Sea $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una función parcialmente recursiva, universal para algún subconjunto no vacío M de funciones recursivas-generales, tal que $K_{rg} \setminus M$ es infinito. Por medio de la «diagonalización», indicar el conjunto numerable de las funciones recursivas-generales, no pertenecientes a M.

3.9. Mostrar que si la función $f(x)$ es parcialmente recursiva, entonces, toda función distinta de $f(x)$ en un conjunto finito de valores del argumento, es parcialmente recursiva.

3.10. Sea $U(x, y)$ una función universal para el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas de un lugar. Demostrar que la función $f(x) = U(x, x) + 1$ no tiene predeterminaciones recursivas (en otras palabras, toda función determinada en todas partes, que coincide con $f(x)$ en todo lugar en donde $f(x)$ está determinada y en lo restante es arbitraria, no es parcialmente recursiva).

3.11. Sea una función parcialmente recursiva $f(x)$ tal, que la función $h(x)$, determinada por la condición:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{en aquellos puntos, donde } f(x) \text{ está determinada,} \\ 1 & \text{en los puntos, donde } f(x) \text{ es indeterminada,} \end{cases}$$

es recursiva. Mostrar, que la función $f(x)$ tiene predeterminación recursiva.

3.12. Poner un ejemplo de sucesión binaria $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, que es engendrada por un operador determinado autónomo conveniente, y cumple la siguiente condición: la función $f(x)$, determinada para todo $n \geqslant 0$ por la igualdad $f(n) = \alpha_n$, no es recursiva-general.

3.13. 1) Mostrar, que si la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, es de salida para cierto operador acotado-determinado autónomo, entonces la función $f(x)$, propuesta para todo $n \geqslant 0$, mediante la relación $f(n) = \alpha_n$, es recursiva-general.

2) Una función así, ¿es siempre primitivamente recursiva?

3.14. Construir un ejemplo de sucesión binaria infinita $\tilde{\alpha} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, que cumpla las siguientes condiciones:

1) no existe ningún a.-d. operador, para el cual $\tilde{\alpha}$ resulta una sucesión de salida;

2) existe una máquina de Turing que comenzando el trabajo con una cinta vacía, construye la sucesión $\tilde{\alpha}$; además, para cada n existe tal momento de tiempo $t_0 = t_0(n)$, que para todo $t \geqslant t_0$ el cabezal de la máquina no observa las células de la cinta que se encuentran a la izquierda de aquella en la que está escrito el símbolo α_n.

3.15. Poner un ejemplo de transformación de palabras finitas, que pueda ser ejecutada con una máquina de Turing conveniente, pero que no pueda ser realizable por ningún operador determinado.

3.16. Para la función dada f, construir una máquina de Turing T, que calcule correctamente f, con evaluación superior para su función temporal de complejidad, y evaluar superiormente las restantes funciones de complejidad. Los datos de entrada son dados en forma monaria. El alfabeto exterior es $A = \{0, 1\}$.

1) $f(x, y) = x + y$, $t_T(n) \leqslant cn$;

2) $f(x) = 2x$, $t_T(n) \leqslant cn^2$;

3) $f(x) = |x - y|$, $t_T(n) \leqslant cn^2$;

4) $f(x, y) = \left[\frac{x}{y} \right]$, $t_T(n) \leqslant cn^2$;

5) $f(x) =]\log_2 x[$, $t_T(n) \leqslant cn^2$.

3.17. Construir una máquina de Turing T, que realice la traducción de una escritura monaria de números a una binaria, con las limitaciones dadas para la función de complejidad: $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \sim n$, $w_T(n) \leqslant c_2 n$, $r_T(n) \leqslant c_3 n$, donde c_1, c_2, c_3 son algunas constantes.

3.18. Construir una máquina de Turing T, que realice la traducción de una escritura binaria a una monaria, tal que $t_T(n) \leqslant c_1 n 2^n$, $s_T(n) \sim c_2 n + 2^n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n 2^n$. $r_T(n) \leqslant c_4 n 2^n$, donde c_1, c_2, c_3, c_4 son algunas constantes.

3.19. Construir una máquina de Turing T, con alfabeto de entrada A de m letras, que transforme la palabra P en la palabra $P{*}P$, donde el símbolo $*$ no forma parte de P, y tal, que $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \leqslant c_2 n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n$, $r_T(n) \leqslant c_4 n$.

3.20. 1) Construir una máquina T, que distinga la linealidad [1]) de una función booleana arbitraria $f(\tilde{x}^n)$. La función $f(\tilde{x}^n)$ se da mediante el vector binario $\tilde{\alpha}_f$, de longitud $N = 2^n$. El alfabeto de entrada de la máquina es $A = \{0, 1, \Lambda\}$. Las funciones $t_T(N)$ y $s_T(N)$ deberán satisfacer las desigualdades $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

2) Construir una máquina T, que distinga la autodualidad de la función booleana arbitraria $f(\tilde{x}^n)$, y tal, que $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3) Construir una máquina T, que distinga la monotonía de la función de Boole arbitraria $f(x^n)$, y tal, que $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3.21. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T y para cualquier palabra P.

1) $s_T(P) \leqslant t_T(P) + |P|$;

2) existe una constante c, tal que $t_T(P) \leqslant c^{s_T(P)}$.

---

[1]) La máquina que distingue alguna propiedad de la palabra de entrada, tiene dos posiciones de clausura: q_0' y q_0''. La máquina deberá detenerse en la posición q_0' si la propiedad se cumple, y en la posición q_0'' si no.

Capítulo VIII

ELEMENTOS DE COMBINATORIA

§ 1. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES. PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMINALES

La colección de los elementos $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ del conjunto $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se llama *selección* o *arreglo de volumen r de n elementos*, o *(n, r)-selección*. La selección se llama *ordenada* si se da el orden consecutivo de los elementos. Dos selecciones ordenadas que se diferencien solamente en el orden consecutivo de los elementos se consideran diferentes. Si el orden consecutivo de los elementos no es sustancial, se dice que la selección es *no ordenada*. En las selecciones se puede admitir o no admitir la repetición de los elementos. Una (n, r)-selección ordenada en la que los elementos pueden repetirse se llama *permutación con repeticiones de n elementos por r* o *(n, r)-permutación con repeticiones*. Si los elementos de una (n, r)-selección son diferentes de par en par, entonces ésta se llama *(n, r)-permutación sin repeticiones*, o, simplemente, *(n, r)-permutación*. El número de (n, r)-permutaciones se designará por el símbolo $P(n, r)$ y el número de (n, r)-permutaciones con repeticiones por $P(n, r)$. Una (n, r)-selección no ordenada en la que sus elementos pueden repetirse se llama *combinación con repetición de n elementos por r* o abreviadamente *(n, r)-combinación con repeticiones*. Si los elementos de una selección no ordenada son diferentes de par en par, ésta se llama *combinación (sin repeticiones) de n elementos por r* o *(n, r)-combinación*. Cada una de estas combinaciones representa en sí un subconjunto de potencia r del conjunto U. El número de combinaciones de n elementos por r se designará por $C(n, r)$ [1]. El número de combinaciones con repeticiones de n elementos por r se designará por $\hat{C}(n, r)$.

---

[1]) En la literatura también se suelen encontrar las designaciones C_n^r, nCr, (n, r), $\binom{n}{r}$.

Ejemplo. Sean $U = \{a, b, c\}$ y $r = 2$. Entonces hay: nueve permutaciones con repeticiones: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;
seis permutaciones sin repeticiones; ab, ac, ba, bc, ca, cb;
seis combinaciones con repeticiones: aa, ab, ac, bb, bc, cc;
tres combinaciones sin repeticiones; ab, ac, bc.

El producto $n(n-1) \ldots (n - r_1 + 1)$, donde n es un número real y r es un número entero positivo, lo designaremos por $(n)_r$. Por definición pondremos $(n)_0 = 1$. Si n es un número natural, pues $(n)_n$ se designa por el símbolo $n!$ y se llama *n-factorial*. Con $n = 0$ suponemos $0! = 1$. Para cualquier n real y un r entero y no negativo la magnitud $\frac{(n)_r}{r!}$ se llama *coeficiente binominal* y se designa por el símbolo $\binom{n}{r}$. Supongamos que $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son números enteros no negativos y $r_1 + r_2 \ldots + r_h = n$. La magnitud $\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$. se llama *coeficiente polinomial* y se designa por $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$.

Al calcular el número de diferentes combinaciones se emplean las dos reglas siguientes.

Regla de la suma. Si el objeto A puede ser elegido de m maneras y el objeto B de otras n maneras, entonces la elección «A, o B» puede ser realizada con $m + n$ procedimientos.

Regla de la multiplicación. Si el objeto A puede ser seleccionado con m procedimientos y después de cada tal selección el objeto B, a su vez, puede ser seleccionado con n procedimientos, entonces la selección «A y B» en el orden indicado puede ser realizado de mn maneras.

1.1. Mostrar que:

1) $\hat{P}(n, r) = n^r$; 3) $C(n, r) = \binom{n}{r}$;

2) $P(n, r) = (n)_r$; 4) $\hat{C}(n, r) = \binom{n+r-1}{n-1}$.

1.2. Hallar el número de vectores $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, cuyas coordenadas satisfacen las condiciones:

1) $\alpha_i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $i = \overline{1, n}$;
2) $\alpha_i \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$, $i = \overline{1, n}$;
3) $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r$.

1.3. 1) ¿Cuál es el número de matrices de n filas y m columnas con elementos del conjunto $\{0, 1\}$?

2) Lo mismo con la condición de que las filas de las matrices sean diferentes de par en par.

1.4. ¿Cuántas y cuáles cifras harán falta para anotar todos los números naturales menores que 10^n?

1.5. Las coaliciones A y B están entre sí en guerra; n países neutrales se encuentran indecisos, de ellos p no se unen a A y k no se unen

a B. ¿Cuántas nuevas situaciones pueden aparecer en esta guerra en dependencia de la conducta sucesiva de los países neutrales?

1.6. Solucionar los problemas siguentes empleando la regla de la suma y de la multiplicación.

1) ¿De cuántas maneras de las 28 fichas del dominó se pueden escoger dos fichas tales que se las pueda poner una junto a la otra (o sea que haya un mismo número en las dos fichas)?

2) Se echan tres dados (con seis caras cada uno). ¿De cuántas maneras pueden éstos caer de forma que, o bien todas las caras de arriba sean iguales, o bien sean diferentes de par en par?

3) Los ingleses tienen la costumbre de dar a sus niños varios nombres. ¿De cuántas maneras se puede dar el nombre a un niño si se le da no más de tres nombres y el número total de nombres es igual a 300? (Dos maneras que se diferencian solamente en el orden de los nombres se consideran diferentes).

1.7. Se dan m objetos de una calidad y n de otra. Hallar el número de selecciones compuestas de r objetos de una calidad y s de la otra.

1.8. Supongamos que $n = p_1^{\alpha_1} \dots u_r^{\alpha_r}$ es la descomposición del número n en el producto de números primos diferentes entre sí de par en par. Hallar:

1) el número de todos los divisores naturales del número n;

2) el número de todos los divisores que no se dividen por el cuadrado de ningún número entero diferente de la unidad;

3) la suma de los divisores del número n.

1.9. 1) De n letras entre las cuales la a entra α veces, la b entra β veces y las demás letras son diferentes de par en par, se forman combinaciones con repeticiones de r elementos. ¿Cuántas habrá entre ellas que contengan h veces la letra a y k veces la letra b?

2) ¿Cuántas palabras diferentes que contengan r letras se pueden componer con estas n letras?

1.10. ¿De cuántas maneras se puede presentar el número n en forma de una suma de k sumandos (las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los sumandos se consideran diferentes), si:

1) cada sumando es un número entero no negativo;

2) cada sumando es un número natural?

1.11. 1) ¿De cuántas maneras se pueden colocar n ceros y k unidades de tal forma que no haya dos unidades seguidas?

2) ¿Cuántos números existen que sean enteros positivos, no mayores de k^n, cuyas cifras estén dispuestas en un orden no decreciente?

3) Una ciudad tiene la forma de rectángulo, las calles la dividen en cuadrados. En la dirección de norte a sur hay n cuadrados y en la dirección de este o oeste hay k cuadrados. ¿Cuál es el número de las rutas más cortas entre uno de los vértices del rectángulo y el opuesto?

1.12. ¿De cuántas maneras se puede presentar el número 11^n en forma de tres factores (las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los factores se consideran diferentes)?

2) El mismo problema, pero las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los factores no se consideran diferentes y $n \neq 3s$.

1.13. ¿De cuántas maneras se pueden colocar k torres en un tablero semejante al del ajedrez pero de dimensiones $m \times n$ de tal manera que ninguna de ellas se amenace mutuamente, o sea que no haya dos o más que se encuentren en una línea vertical o horizontal? Examinar los casos:

1) $k = n = m$, todas las torres son del mismo color;

2) $k = n = m$, hay p torres blancas y $k - p$ torres negras;

3) $k \leqslant n \leqslant m$, todas las torres están pintadas de diferentes colores;

4) $k \leqslant n \leqslant m$, hay k_i torres del color i $(i = \overline{1, s})$, $k_1 + k_2 + \ldots + \ldots + k_s = k$.

1.14. Tenemos una baraja con $4n$ cartas ($n \geqslant 5$) que tiene cuatro palos, en cada uno de los cuales hay n cartas numeradas con 1, 2, ..., n. Calcular de cuántas maneras se pueden recoger cinco cartas de forma que entre ellas resulten:

1) cinco cartas consecutivas de un palo;

2) cuatro cartas de las cinco, con los mismos números;

3) tres cartas con un número y dos con otro;

4) cinco cartas de un mismo palo;

5) cinco cartas numeradas consecutivamente;

6) tres cartas de las cinco con el mismo número;

7) dos cartas de las cinco con los mismos números y las demás con números diferentes.

1.15. Demostrar las propiedades siguientes de los coeficientes binominales:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; 5) $\binom{n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n-r-1}{k-r}$;

2) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n-r}{k-r}\binom{n}{r}$; 6) $\binom{n-r}{k-r} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{(k)_r}{(n)_r}$;

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; 7) $\binom{n+1}{k} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}$;

4) $\binom{n}{k-r} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{(k)_r}{(n-k+r)_r}$; 8) $\sum_{r=k}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{k+1}$.

1.16. Demostrar que:

1) $\binom{n}{k}$ aumenta en función de n con k fijo;

2) $\binom{n-r}{k-r}$ disminuye en función de r con n y k fijos;

3) si n es fijo, entonces $\binom{n}{k}$ aumenta en función de k con $k \leqslant [n/2]$ y disminuye con $k >]n/2[$ [1]);

4) $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = \binom{n}{[n/2]}$;

5) el valor mínimo de la suma $\binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} + \ldots + \binom{n_s}{k}$ bajo la condición de que $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$ es igual a

$$(s-r)\binom{q}{k} + r\binom{q+1}{k},$$

donde $q = [n/3]$, $r = n - s\ [n/s]$;

6) el valor máximo de la suma $\binom{n}{k_1} + \binom{n}{k_2} + \ldots + \binom{n}{k_s}$ bajo la condición de que $0 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n+1$ es igual a

$$\sum_{\frac{n-s}{2} \leqslant j < \frac{n+s}{2}} \binom{n}{j}.$$

7) Mostrar que con un p primo y con cualquier $p > k \geqslant 1$ $\binom{p}{k}$ es múltiplo de p.

8) Mostrar que $\prod\limits_{n < p_i \leqslant 2n} p_i < \binom{2n}{n}$, donde la multiplicación se toma por todos los números primos p_i $(n < p_i \leqslant 2n)$.

1.17. 1) Supongamos que m es un número entero no negativo y $n = n(m)$ es el número entero mínimo tal que $m < n!$. Mostrar que se puede, y además de una sola manera, cotejar al número m tal vector $\tilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ que $m = \alpha_1 \cdot 1! + \alpha_2 \cdot 2! + \ldots + \alpha_{n-1}(n-1)!$, donde $0 \leqslant \alpha_i \leqslant i$ $(i = \overline{1, n-1})$.

2) Hallar el vector $\tilde{\alpha}(m)$ para $m = 15, 23, 37$.

3) ¿A qué números se les cotejan los vectores $\alpha_1 = (0, 1, 0, 23)$, $\tilde{\alpha}_2 = (1, 0, 2, 4)$?

4) Proponer un algoritmo para la enumeración irrepetida de todas las (n, n)-permutaciones de los números $1, 2, \ldots, n$.

1.18. 1) Sean k, n números naturales. Demostrar que a cualquier número entero $m \left(0 \leqslant m < \binom{n}{k}\right)$ se le puede cotejar, y además de una única manera, el vector $\beta(m) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ que satisface la condición

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k,\ m = \binom{\beta_1}{k} + \binom{\beta_2}{k-1} + \ldots + \binom{\beta_k}{1}.$$

---

[1]) Aquí y en adelante con el símbolo $[b]$ se designa la parte entera del número real b, y con el símbolo $]b[$, el menor entero que no es menor que b. Con el signo $\{b\}$ se designa la parte fraccionaria del número b.

2) Determinar el número m por el vector dado $\beta(m) = (6, 3, 0)$.

3) Formar el vector $\widetilde{\beta}(m)$ para $m = 19$, $n = 7$, $k = 4$.

4) A base del problema 1) elaborar un procedimiento para la enumeración irrepetible de todos los vectores de longitud n que tienen k coordenadas igual a la unidad y las demás igual a cero.

1.19. Demostrar, con inducción por n y empleando la relación $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, la identidad

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k. \tag{1}$$

1.20. Supongamos que n y m son números positivos enteros. Empleando la identidad (1), o de algún otro modo, demostrar las igualdades siguientes:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0;$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1};$

4) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)\, 2^{n-2};$

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \binom{n}{k} = (n+1)\, 2^n;$

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1);$

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1};$

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$

9) $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{n+m}{k};$

10) $\sum_{k=0}^{n} (1)^k \binom{n}{k}^2 = (1)^n \binom{2n}{n}$;

11) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2 ((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2$;

12) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{r} = 3^n$;

13) $\sum_{r=k}^{n} (-1)^{k-r} \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{n-1-r} \binom{n}{r}$;

14) $\sum_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k+r} \binom{m}{r} = \binom{m+n}{n-k}$;

15) $\sum_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 \text{ con } m \neq n, \\ 1 \text{ con } m = n. \end{cases}$

Ejemplo. Demostrar la identidad $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Primer procedimiento. El número de subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual a $\binom{n}{k}$, y el número de todos los subconjuntos es 2^n. De esto se deduce la identidad.

Segundo procedimiento. Hacer $t = 1$ en la identidad (1).

1.21. Demostrar que:

1) $\sum_{k} \binom{n}{2k} = \sum_{k} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$;

2) $4 \sum_{k} \binom{n}{4k} = 2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{\pi n}{4}$;

3) si $0 \leqslant r < m$, entonces

$$m \sum_{k} \binom{n}{mk+r} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r \nu}{m}} (1 + e^{\frac{2\pi i \nu}{m}})^n, \text{ donde } i^2 = -1;$$

4) $\sum_{k} \binom{n}{4k+r} = \frac{1}{4} \left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{\pi}{4} (n - 2r)\right)$, $0 \leqslant r \leqslant 3$;

5) si $0 \leqslant r < m$, $m \geqslant 1$, entonces

$$\frac{2^n}{m} \left(1 - (m-1) \cos^n \frac{\pi}{m}\right) \leqslant \sum_{k} \binom{n}{mk+r} \leqslant \frac{2^n}{m} \left(1 + (m-1) \cos^n \frac{\pi}{m}\right).$$

INDICACIÓN. En los problemas 4) y 5) utilizar la identidad del punto 3).

1.22. Demostrar que

$$m\sum_k \alpha^{mk+r}\binom{n}{mk+r}=\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r\nu}{m}}\left(1+\alpha e^{\frac{2\pi i\nu}{m}}\right)^n,$$

y con la ayuda de la identidad demostrada calcular:

1) $\sum_k 3^k\binom{n}{2k}$; 2) $\sum_k (-1)^k 2^k\binom{n}{4k+1}$;

3) $\sum_k (-1)^k 3^k\binom{n}{2k+1}\binom{2k+1}{r}$.

1.23. Demostrar que con $m\geqslant 0$ y $n\geqslant 0$ enteros siempre son válidas las igualdades:

1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(n)_k}{(m)_k}=\frac{m+1}{m-n+1},\quad m>n;$

2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}\Big/\binom{m}{k}=\frac{m+1}{(m-n)(m-n+1)},\quad m>n;$

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)_k}{k!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(n+k-1)_k}{k!}.$

1.24. Que sean a, b números reales y k, m, n, r números enteros no negativos. Demostrar que:

1) $\binom{a}{k}+\binom{a}{k-1}=\binom{a+1}{k}$;

2) $(1+t)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}t^k,\quad |t|<1;$

3) $\binom{-a}{k}=(-1)^k\binom{a+k-1}{k},\quad a>0;$

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a-k}{r}=\binom{a+1}{r+1}-\binom{a-n}{r+1}$;

5) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$ (teorema de la suma);

6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{a}{k}=\binom{a-1}{n}$;

7) $\sum_{k=0}^{n} \binom{a+n-k-1}{n-k} \binom{b+k-1}{k} = \binom{a+b+n-1}{n}$;

8) $\sum_{0 \leqslant k,\ r \leqslant n} \binom{a}{k} \binom{b}{r} \binom{c}{n-k-r} = \binom{a+b+c}{n}$;

9) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{8}\right)^k = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

10) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{2k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sqrt{5} - \sqrt{3}$;

11) $m \sum_{k} \binom{a}{mk+r} b^{mk+r} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r \nu}{m}} (1 + b e^{\frac{2\pi i \nu}{m}})^a, \ |b| < 1.$

1.25. 1) Hallar el número de todas las palabras de longitud mn en un alfabeto de n letras, en las que cada letra del alfabeto aparece m veces.

2) ¿De cuántas maneras un conjunto de n elementos puede ser dividido en s subconjuntos de los cuales el primero contiene k_1 elementos, el segundo k_2 elementos, etc.?

3) Partiendo desde el punto de vista combinatorio mostrar que para cualesquiera números enteros no negativos $k_1, k_2, \ldots, k_s, n$, tales que $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ es válida la igualdad

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \ldots \binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}{k_s} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!}.$$

4) Demostrar, con inducción por s, la identidad

$$(t_1 + t_2 + \ldots + t_s)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_s \\ k_1 + \ldots + k_s = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_s^{k_s}.$$

§ 2. FORMULA DE INCLUSIONES Y EXCLUSIONES

Que haya N objetos y n propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Cada uno de estos objetos puede tener o no tener cualquiera de estas propiedades. Designemos por $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ el número de objetos que tienen las propiedades $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ (y puede ser algunas otras también). Entonces el número de objetos $\hat{N}_0$ que no tienen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se determina con la igualdad

$$\hat{N}_0 = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n, \tag{2}$$

donde $S_0 = N$ y

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}), \quad k = \overline{1, n}.$$

La fórmula (2) se llama fórmula de inclusiones y exclusiones.

EJEMPLO del empleo de la fórmula de inclusiones y exclusiones. Supongamos que una baraja está formada de n cartas numeradas con números desde el 1 hasta el n $(1, \ldots, n)$ ¿De cuántas maneras se pueden colocar las cartas en la baraja de tal forma que para ningún i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ la carta con el número i no se encuentre en el i-ésimo lugar?

SOLUCIÓN. Hay n propiedades α_i del género: «la carta con el número i ocupa en la baraja el i-ésimo lugar». El número de todos los órdenes posibles de las cartas en la baraja es igual a $n!$. El número de colocaciones $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ en las cuales la carta con el número i_ν ocupa el lugar i_ν $(\nu = \overline{1, k})$ es igual a $(n-k)!$ Entonces

$$S_0 = n!, \ S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) = \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Empleando la fórmula (2) obtenemos que el número de colocaciones $\hat{N}_0$ en las que no se cumplen ninguna de las propiedades α_i es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

2.1*. 1) Demostrar por inducción la fórmula (2)

2) Sea $\hat{N}_m$ el número de objetos que tienen exactamente m propiedades de n. Demostrar que

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} S_{m+k}. \tag{3}$$

3) Sea $\breve{N}_m$ el número de objetos que tienen no menos que m propiedades de n. Demostrar que

$$\breve{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m-1+k}{m-1} S_{m+k}. \tag{4}$$

4) Mostrar que

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \hat{N}_m, \tag{5}$$

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1} \breve{N}_m. \tag{6}$$

5) Mostrar que

$$S_m - (m+1) S_{m+1} \leqslant \hat{N}_m \leqslant S_m, \tag{7}$$

$$S_m - mS_{m+1} \leqslant \breve{N}_m \leqslant S_m. \tag{8}$$

2.2. Cuatro caballeros entregan sus sombreros en el guardarropa. Suponiendo que después los sombreros se reciben al azar, hallar la probabilidad de que exactamente k caballeros recibirán sus propios sombreros. Examinar todos los valores de k $(0\leqslant k\leqslant 4)$.

2.3. Sea $E(r, n, m)$ el número de maneras de colocación de r objetos en n cajones entre los cuales quedarán exactamente m cajones vacíos y $F(r, n, m)$ es el número de las colocaciones en las cuales no menos de m cajones resulta que quedan vacíos. Mostrar que:

1) $E(r, n, 0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r;$

2) $E(r, n, m)=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}(n-m-k)^r;$

3) $F(r, n, m)=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}(n-m-k)^r\frac{m}{m+k}.$

2.4. Al investigar los gustos de lectura de los estudiantes resultó que el 60% de ellos lee la revista A; el 50%, la revista B; el 50%, la revista C; el 30%, las revistas A y B; el 20%, las revistas B y C; el 40%, las revistas A y C; el 10%, las revistas A, B y C. ¿Qué tanto por ciento de los estudiantes

1) no lee ninguna revista;

2) lee exactamente dos revistas;

3) lee no menos de dos revistas?

2.5. En una de las cátedras de la universidad trabajan trece personas y cada una de ellas sabe aunque sea una lengua extranjera. Diez personas saben el inglés, siete el alemán, seis el francés. Hay cinco que saben el inglés y el alemán, cuatro que saben el inglés y el francés, tres el alemán y el francés.

1) ¿Cuántas personas saben las tres lenguas?

2) ¿Cuántas personas saben exactamente dos lenguas?

3) ¿Cuántas personas saben sólo el inglés?

2.6. 1) Mostrar que la cantidad de números naturales que se dividen por n y que no son mayores de x es igual a $[x/n]$.

2) Hallar la cantidad de números positivos enteros que no sean mayores de 1000 y que no se dividan por ninguno de los números 3, 5 y y 7.

3) Hallar la cantidad de números positivos enteros que no sean mayores de 1000 y que no se dividan por ninguno de los números 6, 10 y 15.

4) Demostrar que si $n=30\,m$, entonces la cantidad de números enteros que no son mayores de n y que no se dividen por ninguno de los números 6, 10, 15 es igual a $22\,m$.

5) Supongamos que $p_1, \ldots, p_r$ son todos números primos no mayores de $\sqrt{n}$. Mostrar que la cantidad de números primos p tales

que $\sqrt{n} < p \leqslant n$ es igual a $n - 1 - \sum_{k=1}^{r} (-1)^k S_k$, donde la suma

$$S_k = \sum \left[\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}} \right]$$

se toma por todas las colecciones posibles $\binom{r}{k}$ de los índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ en los que hay exactamente k índices iguales a 1 y los demás son iguales a cero.

6) Hallar la cantidad de números primos no mayores de 250.

2.7. Sea U un conjunto de n $(n \geqslant 3)$ elementos.

1) Hallar el número de pares (X, Y) de subconjuntos del conjunto U tales que $X \cap Y = \phi$.

2) Hallar el número de pares (X, Y) tales que $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$.

3) Hallar el número de tales tríos (X, Y, Z) que $X \subseteq U, Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

4) Hallar el número de tales pares (X, Y) de subconjuntos del conjunto U que $X \cap Y = \phi$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 3$.

5) Hallar el número de tales pares (X, Y), que $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$.

6) Hallar el número de tales tríos (X, Y, Z) que $X \subseteq U, Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$, $|Z| \leqslant 1$.

2.8. PROBLEMA DEL MAYORDOMO. A una comida que tendrá lugar en una mesa redonda están invitados n pares de caballeros enemigos entre sí $(n \geqslant 2)$. Hay que acomodarlos en la mesa de tal manera que ningún par de enemigos estén sentados uno al lado del otro. Mostrar que eso se puede hacer de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$ maneras.

2.9. PROBLEMA DE LOS MATRIMONIOS. ¿De cuántas maneras se puede acomodar en una mesa redonda n matrimonios de tal forma que los hombres y las mujeres se alternan y ningún matrimonio esté sentado junto?

§ 3. SUCESIONES REGRESIVAS, FUNCIONES GENERATRICES, RELACIONES RECURRENTES

La sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ se llama *regresiva* si para cierto k y todas las n se cumple la relación del tipo

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} \ldots + p_k a_n = 0, \tag{9}$$

donde los coeficientes p_i, $i = \overline{1, k}$ no dependen de n. El polinomio

$$P_a(x) = x^k + p_1 x^{k-1} \ldots + p_k \tag{10}$$

se llama *característico* para la sucesión regresiva $\{a_n\}$.

3.1. 1) Demostrar que una sucesión regresiva se determina por completo al dar los primeros k términos.

2) Supongamos que λ es la raíz de un polinomio característico. Mostrar que la sucesión $\{c\lambda^n\}$, donde c es una constante arbitraria, satisface la relación (9).

3) Demostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son raíces simples (que no son múltiples) de un polinomio característico, entonces la solución general de la relación recurrente (9) es del tipo siguiente $a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$.

4) Supongamos que λ_i es la raíz de la multiplicidad r_i $(i = \overline{1, s})$ del polinomio característico (10). Demostrar que en este caso la solución general de la relación recurrente (9) es del tipo

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} (c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{ir_i}n^{r_i-1})\lambda_i^n,$$

donde c_{ij} $(i = \overline{1, s};\ j = \overline{1, r_i})$ son constantes arbitrarias.

3.2. Hallar la solución general de las relaciones recurrentes:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$;
2) $a_{n+2} + 3a_n = 0$;
3) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$;
4) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;
5) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$;
6) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

3.3. Hallar a_n por las relaciones recurrentes y las condiciones iniciales:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$,
$a_1 = 10,\ a_2 = 16$;
2) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$,
$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 27$;
3) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$,
$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$;
4) $a_{n+2} - 2\cos\alpha\, a_{n+1} + a_n = 0$,
$a_1 = \cos\alpha,\ a_2 = \cos 2\alpha$.

3.4. Demostrar que:

1) si $x = 1$ no es raíz del polinomio $x^2 + px + q$, entonces una solución particular de la relación recurrente

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = \alpha n + \beta \tag{11}$$

donde α, β, p, q son números dados, es la sucesión $a_n^* = an + b$; hallar a y b;

2) si $x = 1$ es una raíz simple del polinomio $x^2 + px + q$, entonces la solución particular se puede encontrar en la forma $a_n^* = n(an + b)$; hallar a y b;

3) si $x = 1$ es la raíz múltiple del polinomio $x^2 + px + q$, entonces se puede encontrar una solución particular de la forma $a_n^* = n^2(an + b)$; hallar a y b;

4) en cada uno de los casos anteriores encontrar la solución general de la relación (11).

3.5. Resolver las relaciones recurrentes:

1) $a_{n+1} - a_n = n$, $a_1 = 1$;
2) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$,
$a_1 = -9$, $a_2 = 45$;
3) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17$,
$a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 41$.

3.6. 1) Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones cuyos términos están ligados con las relaciones

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$
$$b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n,$$
$$\Delta = p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0,$$

donde p_1, q_1, p_2, q_2 son números dados. Hallar la expresión para a_n y b_n considerando que a_1 y b_1 están dados.

2) Hallar la solución del sistema de relaciones recurrentes

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n,$$
$$b_{n+1} = -a_n + b_n,$$
$$a_1 = 14, \; b_1 = -6.$$

3) Hallar la solución general del sistema de relaciones recurrentes

$$a_{n+1} = b_n + 5, \qquad b_{n+1} = -a_n + 3.$$

3.7. La sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ se da con la relación recurrente $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ y las condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$. Demostrar que:

1) para cualesquiera números naturales n y m, $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$.
2) para cualesquiera m y $n = km$ el número F_n se divide por F_m.
3) dos números consecutivos F_n y F_{n+1} son primos entre sí;
4) todo número natural N ($N > 1$) puede ser unívocamente representado en forma de una suma de los números de Fibonacci, tal que cada número entra en la suma no más de una vez y ningunos dos números consecutivos no entran juntos;

5) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;
6) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$;
7) $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$;
8) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

Se puede ligar la serie $A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$, llamada *función generatriz para la sucesión* $\{a_n\}$ con cada sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ En aquellos casos cuando la serie $A(t)$ converge a cierta función $f(t)$, entonces también se dice que la función $f(t)$ es *generatriz para* $\{a_n\}$. La serie $E(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + \frac{a_n t^n}{n!} + \ldots$ se llama *función generatriz exponencial para* $\{a_n\}$. Las

operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por una constante para las funciones generatrices se pueden definir examinándolas como series formales. Supongamos que $A(t)$ y $B(t)$ son funciones generatrices para las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente, α y β son constantes. Entonces

$$\alpha A(t)+\beta B(t)=\alpha a_0+\beta b_0+(\alpha a_1+\beta b_1)t+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha a_n+\beta b_n)t^n+\ldots$$
$$A(t)\cdot B(t)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)t+\ldots$$
$$\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)t^n+\ldots,$$

Si $E_a(t)$ y $E_b(t)$ son funciones generatrices exponenciales para las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente, pues la suma y la multiplicación por una constante se definen lo mismo que para las funciones generatrices corrientes y su producto se define de la manera siguiente

$$E_a(t)\cdot E_b(t)=c_0+c_1t+\ldots+\frac{c_nt^n}{n!}+\ldots,$$

donde $c_n=a_0b_n+\binom{n}{1}a_1b_{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0$.

3.8. Mostrar que la función $A(t)$ (y respectivamente la $E(t)$ es una función generatriz (generatriz exponencial) para la serie $\{a_n\}$ si:

1) $a_n=a^n$, $A(t)=(1-at)^{-1}$, $E(t)=\exp(at)$;

2) $a_n=n$, $A(t)=t(1-t)^{-2}$, $E(t)=t\exp t$;

3) $a_n=n(n-1)$, $A(t)=2t^2(1-t)^{-3}$, $E(t)=t^2\exp t$;

4) $a_n=n^2$, $A(t)=t(t+1)(1-t)^{-3}$, $E(t)=t(t+1)\exp t$;

5) $a_n=\binom{m}{n}$, $A(t)=(1+t)^m$;

6) $a_n=(m)_n$, $E(t)=(1+t)^m$.

3.9. Supongamos que $A(t)$ y $E(t)$ son, respectivamente, una función corriente y una función generatriz exponencial de la serie $\{a_n\}$.

1) Empleando la igualdad $n!=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n dx$, mostrar que

$$A(t)=\int\limits_0^\infty e^{-x}E(xt)\,dx. \qquad (*)$$

2) Convencerse de que la fórmula (*) es válida para las funciones generatrices $A(t)=(1-t)^{-1}$ y $E(t)=e^t$ de la serie $a_0=a_1=a_2=\ldots=1$.

3) Lo mismo para las series con un término común

$$a_n=\begin{cases}0, & n<j,\\ (n)_j, & n\geqslant j.\end{cases}$$

3.10. 1) Supongamos que $(a)_n = a(a-1)\ldots(a-n+1)$. Demostrar, empleando funciones generatrices exponenciales, que

$$(a+b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_{n-k} (b)_k.$$

INDICACION. Emplear la identidad $(1+t)^{a+b} = (1+t)^a (1+t)^b$.

2) Supongamos que $(a)_{n,h} = a(a+h)\ldots(a-h(n-1))$. Demostrar que

$$(a+b)_{n,h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_{n-k,h} (b)_{k,h}.$$

3.11. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ series, y $A(t)$ y $B(t)$ las respectivas funciones generatrices. Mostrar que

1) si $a_n = b_n - b_{n-1}$, entonces $A(t) = B(t)(1-t)$;

2) si $a_n = b_{n+1} - b_n$, entonces $A(t) = B(t)\frac{1-t}{t} - b_0 t^{-1}$;

3) si $a_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots$, entonces $A(t) = \frac{B(1)-B(t)}{1-t}$;

4) si $a_n = nb_n$, entonces $A(t) = t\frac{d}{dt}B(t)$;

5) si $a_n = n^2 b_n$, entonces $A(t) = t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}B(t)\right)$;

6) Si se determina la operación S^k $(k \geqslant 0)$ sobre la serie $\{b_n\}$ mediante la relación

$$S^k(b_n) = b_n + \binom{k}{1} b_{n-1} + \ldots + \binom{k+j-1}{j} b_{n-j} + \ldots \\ \ldots + \binom{k+n-1}{n} b_0$$

y se pone $a_n = S^k(b_n)$, entonces $A(t) = (1-t)^n B(t)$;

7) si $a_n = b_{2n}$, entonces $A(t) = \frac{1}{2}(B(t^{1/2}) + B(-t)^{1/2}))$;

8) si $a_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$, entonces $A(t) = B(t)\,t\,(1-t)^{-1}$.

3.12. Sean $A(t)$ y $B(t)$ funciones generatrices de las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente. Supongamos también que $A(t)\cdot B(t) = 1$. Hallar $\{b_n\}$ y $B(t)$ por la serie dada $\{a_n\}$.

1) $a_n = \binom{m}{n}$; 4) $a_0 = a_2 = 1$, $a_n = 0$ con $n \neq 0, 2$;

2) $a_n = a^n$; 5*) $a_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)!}$;

3) $a_n = n+1$; 6) $a_n = (-1)^n \binom{2n}{n} 4^{-n}$.

3.13. Mediante identidades relacionadas con las funciones generatrices deducir las identidades siguientes para coeficientes bino-

miales:

1) $(1+t)^n (1+t)^m = (1+t)^{n+m}$;

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s} = \binom{n+m}{k};$$

2) $(1-t)^{-1-n}(1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$;

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{n+s}{n}\binom{m+k-s}{m} = \binom{n+m+k+1}{k};$$

3) $(1+t)^n (1+t)^{-m} = (1+t)^{n-m}$;

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s}\binom{n}{s}\binom{m+k-s-1}{k-s} = \binom{n-m}{k};$$

4) $(1-t)^{-1-n}(1+t)^{-1-n} = (1-t^2)^{-1-n}$;

$$\sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \binom{n+s}{n}\binom{n+2k-s}{n} = \binom{n+k}{k};$$

5) $(1+t)^n (1-t^2)^{-n} = (1-t)^{-n}$;

$$\sum_{s=0}^{[k/2]} \binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s} = \binom{n+k-1}{k};$$

6) $(1+t)^n (1-t)^n = (1-t^2)^n$;

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{n}{k-s}\binom{n}{s} = \begin{cases} (-1)^{k/2}\binom{n}{k/2}, & k \text{ es par}, \\ 0, & k \text{ es impar}. \end{cases}$$

3.14. Hallar el término común a_n de la serie para la cual la función $A(t)$ es generatriz.

1) $A(t) = (q+pt)^m$;
2) $A(t) = (1-t)^{-1}$;
3) $A(t) = \sqrt{1-t}$;
4) $A(t) = t^m (1-t)^m$;
5) $A(t) = (t+t^2+\ldots+t^r)^m$;
6) $A(t) = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$;
7) $A(t) = (1+2t)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-m}$;
8) $A(t) = t^2(1-t)(1+2t)^{-m}$;
9) $A(t) = \ln(1+t)$;
10) $A(t) = \text{arc tg } t$;
11) $A(t) = \text{arc sen } t$;

12) $A(t)=e^{-2t^2}$;

13) $A(t)=\int\limits_0^t e^{-x^2}\,dx$;

14) $A(t)=\frac{1}{m!}\left(\frac{-t}{1+t}\right)^m$.

3.15. Deducir las identidades [1]):

1) $\sum\limits_s (-1)^{n-s}\binom{n}{s}\binom{m+s}{m+1}=\binom{m}{n-1}$;

2) $\sum\limits_s (-1)^s\binom{m}{s}\binom{s}{n}=\begin{cases} 0 & \text{con } m\neq n,\\ (-1)^n & \text{con } m=n;\end{cases}$

3) $\sum\limits_s (-1)^s\binom{m}{m-k+s}\binom{n+s}{n}=\binom{m-n-1}{k}$;

4) $2\sum\limits_s \binom{n}{2s}\binom{n}{2m-2s}=\binom{2n}{2m}+(-1)^m\binom{n}{m}$;

5) $2\sum\limits_s \binom{n+2s}{n}\binom{n+2m-2s+1}{n}=\binom{2n+2m+2}{2n+1}$;

6) $\sum\limits_{s=0}^{n} (-1)^{n-s}4^s\binom{n+s+1}{2s}=n+1$.

3.16. Supongamos que la serie $\{a_n\}$ satisface la relación recurrente $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$.

1) Mostrar que $A(t)=\frac{a_0+(a_1+pa_0)t}{1+pt+qt^2}$.

2) Que sean $1+pt+qt^2=(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Mostrar que

$$a_n=(a_1+pa_0)\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}+a_0\,\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

3) Expresar a_n en el caso cuando $1+pt+qt^2=(1-\lambda t)^2$.

4) Hallar las funciones generatrices para las series dadas con las relaciones recurrentes de los problemas 3.2, 1) —4).

3.17. Supongamos que

$$a_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2j}{2j}\qquad b_n=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+j}{2j+1},$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

---

[1]) La suma se hace por todas las s para las cuales las expresiones estudiadas tienen sentido.

y que $A(t)$ y $B(t)$ son las respectivas funciones generatrices.

1) Mostrar que a_n y b_n están ligadas con las relaciones del tipo

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1},$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

2) Mostrar que $A(t)$ y $B(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$A(t) - 1 = tA(t) + B(t),$$
$$B(t) = tA(t) + tB(t).$$

3 Hallar $(A(t)$ y $B(t)$.

4 Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.18. Supongamos que los términos de la serie $\{a_n\}$ satisfacen la relación

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, \quad a_0 = 1.$$

1) Mostrar que la función generatriz $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ satisface la igualdad $tA^2(t) = A(t) - a_0$, o bien teniendo en cuenta la condición inicial $A(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$.

2) Mostrar, descomponiendo $A(t)$ en una serie por los exponentes t, que $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

3.19. Deducir la relación recurrente para la serie de números a_n y resolver esta relación si:

1) a_n es el número de maneras de partición de un $(n+2)$ - ágono convexo en triángulos. Las particiones se hacen con diagonales que no se intersecan dentro de este polígono;

2) a_n es el número de maneras de colocación de los paréntesis en la expresión $b_1 : b_2 : \ldots : b_{n+1}$ con las que las expresiones obtenidas tienen sentido.

3.20. Hallar la sucesión $\{a_n\}$ cuyos términos satisfacen las relaciones:

1) $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0 = 2^na_n$, $a_0 = a_1 = 1$;
2) $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$;
3) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
4) $(n+2)^2a_{n+2} + a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

3.21. Sea $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a(n, k)t^k$ una función generatriz para la serie que satisface la relación $a(n, k) = a(n, k-1) + a(n-1, k)$ con la condición inicial $a(n, 0) = 1$. Mostrar que:

1) $(1-t)A_n(t) = A_{n-1}(t)$;
2) $A_n(t) = (1-t)^{-n}$;
3) $a(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

3.22. 1) La función $A(t) = \prod_{q=1}^{\infty} (1 - q^n t)$, $|q| < 1$, se descompone en la serie $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Hallar los coeficientes a_n.

INDICACION. Aprovecharse de que $A(t) = (1 - qt) A(qt)$. Comparar los coeficientes de las partes derecha e izquierda de esta igualdad.

2) Hallar los coeficientes b_n de la serie $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, donde $B(t) = A^{-1}(t)$.

3.23. Supongamos que a_n es el número de soluciones de la ecuación $2x + 5y + 7z = n$ en números enteros no negativos. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = (1 - t^2)^{-1} (1 - t^5)^{-1} (1 - t^7)^{-1}.$$

3.24. Sea a_n la cantidad de representaciones del número n en forma de la suma

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4, \quad x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, 4}.$$

Hallar la función generatriz $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

3.25. Sea

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + qt^{2^k}) = \sum_{n=0} a_n t^n.$$

Demostrar que $a_n = q^{b_n}$, donde b_n es la cantidad de unidades en la descomposición binaria del número n.

3.26. Sea

$$S(n, k, l) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\nu + l)^k.$$

Demostrar que:

1) $S(n + 1, k, l) = S(n, k, l + 1) - S(n, k, l)$;
2) $S(n, k, l + 1) = S(n, k, l) - S(n + 1, k, l)$;
3) $S(n, k + 1, l) = (n + l) S(n, k, l) + nS(n - 1, k, l)$;
4) $S(n, k, l) = 0$, con $n > k$;
5) $S(n, k, l) = n!$;
6) $S(n, k, l) > 0$, con $n \leqslant k$;
7) $S(n, k, l)$ es una función creciente de los parámetros k y l con $n \leqslant k$;

8) $S(n, n+1, l) = \frac{n+2l}{2} (n+1)!$;

9) $S(1, k, 0) = 1$, con $1 \leqslant k$.

3.27. Sea

$$S(n, k) = S(n, k, 0) = \sum_{\nu} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^k$$

y $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k) t^k$. Mostrar que con $|t| < 1$

1) $\sigma_n(t) = \frac{n! t^n}{(1-t)(1-2t) \ldots (1-nt)}$;

2) $\sigma_n(t) = t \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k \binom{n}{k}}{1-kt}$.

§ 4. EVALUACIONES ASINTOTICAS Y DESIGUALDADES

Al evaluar el incremento de las funciones se emplean las designaciones siguientes. La anotación $\varphi(x) = O(\psi(x))$ con $x \in X$ significa que existe una constante C tal que $|\varphi(x)| \leqslant C |\psi(x)|$ para $x \in X$. Si $\varphi(x) = O(\psi(x))$ y $\varphi(x) = 0(\varphi(x))$ con $x \in X$, pues anotan $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ siempre que $x \in X$. La notación $\varphi(x) = o(\psi(x)$ con $x \to a$ significa que $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$. Se dice que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son *asintóticamente iguales* (la designación es: $\varphi(x) \sim \psi(x)$) siempre que $x \to a$, si $\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x))$ siempre que $x \to a$. Al efectuar diferentes evaluaciones es útil la *fórmula de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{12}$$

Para hacer evaluaciones más exactas se emplean las desigualdades

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) < n! < \\ < \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n}\right). \tag{13}$$

4.1. Demostrar las desigualdades [1]):

1) $n^{n/2} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ con $n > 2$;

2) $2n! < [n(n+1)]^n$;

3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$;

4) $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$;

5) $(n!)^2 < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n$, $n > 1$;

[1]) Con el símbolo $(2n-1)!!$ se designa el número $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)$, y $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$.

6) $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n\leqslant\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

7) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

8) $(2n-1)!!<n^n$, $n>1$; 9) $n!>e^{-n}n^n$.

4.2. Demostrar las desigualdades

1) $\left(2\frac{n-k}{k+1}\right)^k<\binom{n}{k}<\binom{3n}{k}^k$, $n>k>1$;

2) $\binom{n}{k}^k<\binom{n}{k}<\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$, $n>k>0$;

3) $\frac{4^n}{2\sqrt{n}}<\binom{2n}{n}\leqslant\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$, $n>1$.

4.3. Mostrar, empleando la fórmula de Stirling, que con $n\to\infty$ son válidas las igualdades asintóticas siguientes:

1) $(2n-1)!!\sim\sqrt{2}\,(2n)^n e^{-n}$;

2) $\binom{2n}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n$;

3) $\frac{n!}{\left(\left[\frac{n}{3}\right]!\right)^2\left(n-2\left[\frac{n}{3}\right]\right)!}\sim\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cdot\frac{3^n}{n}$;

4) $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}\sim\frac{k!}{m!}n^{m-k}$ para los números enteros y no negativos k y m;

5) $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}n}$.

4.4. Demostrar que con $n\to\infty$ son válidas las igualdades asintóticas siguientes:

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\sim\frac{2^{n+1}}{n}$;

2) $\sum_{\nu}\binom{n}{r+k\nu}\sim\frac{1}{k}2^n$, $0\leqslant r<k$;

3) $\sum_{\nu}\binom{n}{r+k\nu}\alpha^{r+k\nu}\sim\frac{1}{k}(1+\alpha)^n$, $0\leqslant r<k$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}\sim\ln n$;

5) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}4^n$.

4.5. Sean $b_0, b_1, \ldots, b_n$ unos números tales que $0 < a^k \leqslant b_k \leqslant \leqslant c^k < 1$. Aclarar si es justo que:

1) $(1+a)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \leqslant (1+c)^n$;

2) $(1-c)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \leqslant (1-a)^n$

4.6. 1) Demostrar la desigualdad de Chébishev en la forma siguiente. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una reunión de números, $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$, $Da = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2$. Entonces la parte δ_t de aquellos a_i para los cuales $|a_i - \bar{a}| \geqslant t$, no supera $\frac{Da}{t^2}$.

2) Demostrar, empleando la desigualdad de Chébishev, que

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} - t\sqrt{n}} \binom{n}{k} + \sum_{\frac{n}{2} + t\sqrt{n} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \leqslant \frac{2^n}{(2t)^2}.$$

3) Mostrar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$.

4.7. Con ayuda de la fórmula de Stirling mostrar que:

1) si $k \to \infty$ y $k - \frac{n}{2} = o(n^{3/4})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}};$$

2*) si $a > 0$, $k \to \infty$ y $k - \frac{an}{a+1} = o(n^{2/3})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\binom{n}{k} a^k = \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi na}} e^{-\frac{(k(a+1)-n)^2}{2an}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n} + \frac{(k(a+1)-n)^3}{n^2}\right)\right);$$

3*) si $a > 0$, $k < m$, $k \to \infty$, y k, $m = \frac{an}{a+1} + o(n^{2/3})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\sum_{\nu=k}^{m} \binom{n}{\nu} a^\nu \sim \frac{(a+1)^n \sqrt{na}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{((a+1)m-an)^2}{na}}}{m(a+1)-na} - \frac{e^{-\frac{((a+1)k-an)^2}{na}}}{k(a+1)-na}\right);$$

4*) si $a>0$, $k\to\infty$ y $k-\frac{an}{a+1}=o(n^{2/3})$ con $n\to\infty$, entonces

$$\sum_{\nu>na+t\frac{\sqrt{na}}{a+1}} \binom{n}{\nu} a^{\nu} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4.8. Supongamos que $0<\lambda<1$, λn es un número entero, $\mu=1-\lambda$ y que $G(n,\lambda)=\frac{\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}}{\sqrt{2\pi\lambda\mu n}}$. Con ayuda de las fórmulas (12) y (13) mostrar que:

1) $\binom{n}{\lambda n}\sim G(n,\lambda)$ con $n\to\infty$;

2) $G(n,\lambda)\exp\left(-\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\right)<\binom{n}{\lambda n}<G(n,\lambda)$;

3) $\frac{\sqrt{n}}{2}G(n,\lambda)\leqslant\binom{n}{\lambda n}$;

4) $\binom{n}{\lambda n}<\sum\limits_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\frac{\lambda}{2\lambda-1}\binom{n}{\lambda n}$ con $\lambda>\frac{1}{2}$;

5) $\sum\limits_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}$ con $\lambda>\frac{1}{2}$.

4.9. Supongamos que k y n son números naturales ($k<n$). Mostrar que:

1) $(n)_k=n^k\exp\left(-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot n^{\nu}}\sum\limits_{i=1}^{k-1} i^{\nu}\right)$;

2) si con $n\to\infty$ $k=o(\sqrt{n})$, entonces $(n)_k\sim n^k$;

3) si $k=o(n)$ con $n\to\infty$, entonces para cualquier $m>1$

$$(n)_k=n^k\exp\left(-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)\,n^{\nu}}+O\left(\frac{k^{m+1}}{n^m}\right)\right);$$

4) con $n\to\infty$ y $k=o(n^{3/4})$

$$(n)_k=n^k\exp\left(-\frac{k^2}{2n}-\frac{k^3}{6n^2}+o(1)\right).$$

4.10. 1) Sean $k=k(n)$ y $s=s(n)$ tales que con $n\to\infty$ $s=o(\sqrt{k})$. Mostrar que $\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}\sim\binom{k}{n}^{s}$.

2) Mostrar que si $s=o(k^{\frac{r}{r+1}})$, entonces

$$\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}\sim\binom{k}{n}^{s}\exp\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{s^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{1}{k^{\nu}}-\frac{1}{n^{\nu}}\right)\right).$$

4.11. Sean $s = s(n)$ y $k = k(n)$ funciones en números enteros no negativos de un argumento natural. Mostrar que:

1) si $s+k = o(n)$ con $n\to\infty$, entonces

$$\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} = \exp\Big(-\frac{sk}{n}-\frac{s^2k+sk^2}{2n^2}-s\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu}-$$
$$-k\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu-1)}\left(\frac{s}{n}\right)^{\nu}+o(1)\Big);$$

2) si $s^2+k^2=o(n)$ con $n\to\infty$, entonces $\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k}\sim 1$;

3) $$\exp\left(-\frac{sk}{n}\left(1+\frac{k}{n-k}+\frac{sn}{2(n-k)(n-k-s)}\right)\right)<$$
$$<\frac{\binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}}<\exp\left(-\frac{sk}{n}\right),\ n>k+s.$$

4.12. Sea $f(x)$ una función continua monótona creciente en el segmento $[n, m]$. Mostrar que

$$f(n)\leqslant\sum_{k=n}^{m}f(k)-\int_{n}^{m}f(x)\,dx\leqslant f(m).$$

4.13. Utilizando el problema anterior mostrar que con $m\to\infty$ son válidas las relaciones siguientes:

1) $\sum_{k=1}^{m}\ln k\sim m\cdot\ln m-m+O(\ln m)$;

2) $\sum_{k=1}^{m}k^n=\frac{1}{n+1}m^{n+1}+O(m^n),\ n>1$;

3) $\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k\ln k\cdot\ln\ln k}=\ln\ln\ln m+c+O\left(\frac{1}{m\ln m\ln\ln m}\right)$,

c es una constante;

4) $\sum_{k=1}^{m}\frac{\log k}{k}=\frac{1}{2}\log^2 m+c+O\left(\frac{\log m}{m}\right)$, c es una constante;

5) $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k\ln^2 k}=c+\frac{1}{\ln m}+O\left(\frac{1}{m\ln^2 m}\right)$, c es una constante;

6) $\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^{\nu}}=\frac{1}{\nu-1}\left(\frac{1}{n^{\nu-1}}-\frac{1}{m^{\nu-1}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\nu}}-\frac{1}{m^{\nu}}\right)$.

4.14. La sucesión $\{p_n\}$ se define con la relación recurrente $p_n = p_{n-1} - \alpha p_{n-1}^{\beta}$, $p_0 = 1$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$. Mostrar que

1) $0 < p_n < 1$, $n \geqslant 1$;

2) p_n decrece en forma monótona con el incremento de n;

3*) $p_n \sim (\alpha(\beta-1)n)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $n \to \infty$.

INDICACIÓN. Utilizar las desigualdades

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - p_{k-1}}{-\alpha p_{k-1}^{\beta}} < \int_1^{p_n} \frac{dx}{-\alpha x^{\beta}} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_k - p_{k-1}}{-\alpha p_{k-1}^{\beta}} = n+1.$$

4.15*. Supongamos que la función generatriz $A(t)$ de la sucesión $\{a_n\}$ tiene la forma $A(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$, donde $Q(t)$ y $P(t)$ son polinomios con coeficientes reales. Sea λ_1 la raíz de menor valor absoluto del polinomio $P(t)$. Demostrar que:

1) si λ_1 se una raíz real simple (no múltiple), entonces con $n \to \infty$

$$a_n \sim -\frac{Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)} \lambda_1^{-n-1}, \text{ donde } P'(\lambda_1) = \frac{d}{dt} P(t)\big|_{t=\lambda_1};$$

2) si λ_1 es una raíz real de multiplicidad r, entonces con $n \to \infty$

$$a_n \sim \frac{(-1)^r r!\, Q(\lambda_1)}{P^{(r)}(\lambda_1)} \binom{r+n-1}{r-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{n+r},$$

donde $P^{(r)}(\lambda_1)$ es la derivada de orden r de $P(t)$ en el punto $t = \lambda_1$.

4.16. Sea $A(t)$ la función generatriz de la serie $\{a_n\}$. Hallar la conducta asintótica de a_n con $n \to \infty$.

1) $A(t) = \frac{1+t}{3t^2-4t+1}$; 5) $A(t) = \frac{2t^3}{6t^4-17t^3+35t^2-22t+4}$;

2) $A(t) = \frac{1}{6t^2+5t-6}$; 6) $A(t) = \frac{1-3t}{(8t^3-1)(t^2+1)}$;

3) $A(t) = \frac{12t^3+10t^2}{6t^2+5t-6}$; 7) $A(t) = \frac{1}{(t^2+2t-2)^2}$;

4) $A(t) = \frac{t}{4t^2+1}$; 8) $A(t) = \frac{t^3-1}{(2t^2+1)(t^2+1{,}4t+0{,}49)}$.

4.17. Por la relación recurrente dada y las condiciones iniciales hallar la conducta asintótica de a_n con $n \to \infty$.

1) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

2) $a_n = qa_{n-1} + p(1 - a_{n-1})$, $a_0 = 1$, $p + q = 1$, $p, \ q > 0$;

3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$;

4) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = -3$;

5) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 2^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$.

4.18. 1) Mostrar que la solución de la ecuación $xe^x = t$ tiene la forma

$$x = \ln t - \ln\ln t + \frac{\ln\ln t}{\ln t} + O\left(\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)^2\right) \quad t \to \infty.$$

2) Mostrar que la solución de la ecuación $e^x + \ln x = t$ con $t = \infty$ tiene la forma

$$x = \ln t - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right).$$

4.19. Sean $f(t) > 0$ y $e^{tf(t)} = f(t) + t + O(1)$, $0 < t < \infty$. Mostrar que $f(t) = \frac{\ln t}{t} + O(t^{-2})$ con $t \to \infty$.

4.20. Supongamos que a_n satisface las relaciones

$$a_n \geqslant 2^{-n-1} + (n-1)\cdot 4^{-n-1}, \qquad (14)$$

$$a_{n+2} \leqslant 2^{-n-3} + (n+1)\cdot 4^{-n-3} + a_n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} + (n+2)\cdot 2^{n-2} + 4a_n\right), \qquad (15)$$

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{16}.$$

Mostrar que:

1) $a_n \leqslant 1/8$;
2) $a_n \leqslant 9\,(3/4)^n$;
3) $a_n = 2^{-n-1}\,(1 + O\,(3/4)^n)$.

4.21. Que sean k y n números enteros. Calcular, con una exactitud de hasta 1, $k = k(n)$ con la que la función $f(n, k)$ toma el valor máximo.

1) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{-2^k}$;

2) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{n-k-2^k}(1 - 2^{-2^k})^{n-k}$.

4.22. Hallar el valor máximo y el mínimo de la expresión

$$f(n, r, k) = \binom{n}{k}\binom{n-r}{k-r} 2^{-r+2^r}$$

como función de r ($0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$; r, n, k son números enteros).

4.23. Hallar la conducta asintótica con $n \to \infty$ de la magnitud $g(n) = \min\limits_{0 \leqslant k < n} f(n, k)$, k es un número entero, si:

1) $f(n, k) = 2^{n-k} + 2^k$;

2) $f(n, k) = k\cdot 2^k + \frac{1}{k} 2^{2n-k}$.

SOLUCIONES, RESULTADOS E INDICACIONES

Capítulo I

§ 1

1.1. 1) $\binom{n}{k}$; 2) 2^n. 1.2. 1) 9, 13, 50; 2) (010011). 1.3. $\binom{n-1}{k-1}$.

1.5. 1) $n2^{n-1}$; 2) $\binom{n}{k}2^{n-1}$. 1.6. 1) 2^m; 2) [1] $\binom{m}{\frac{k+m-r}{2}}\binom{n-m}{\frac{k-m+r}{2}}$;

3) [1] $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{\frac{j+m-r}{2}}\times\binom{n-m}{\frac{j+r-m}{2}}$.

1.9. INDICACIÓN. Mostrar que el número $\psi(n)$ de vectores $\widetilde{\alpha}\in B_n^{2n}$, tales que $\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\leqslant m/2$ para todos los $m=\overline{1,\,2n}$ satisface la relación recurrente $\psi(n)=\sum_{i=1}^{m}\psi(i-1)\psi(n-i)$, $\psi(0)=\psi(1)=1$. Utilizando esta relación hallar que $\psi(6)=132$.

1.10. $\binom{n-r(k-1)}{k}$.

1.11. 1) INDICACIÓN. Ver la capa $B^n_{[n/2]}$ 2) INDICACIÓN. Entre $n+2$ colecciones de B^n siempre se encontrarán dos colecciones de un mismo peso.

1.12. 1) $\binom{n-l}{k-l}$; 2) $\binom{k}{l}$; 3) $2^k+2^{n-k}-1$.

1.13. Suponiendo que $0\leqslant l<k\leqslant n$, calcularemos el número $p(n,\,k,\,l)$ de pares $(\widetilde{\alpha},\,\widetilde{\beta})$ tales que $\widetilde{\alpha}\in A$, $\widetilde{\beta}\in B$. Por una parte $p(n,\,k,\,l)=|A|\binom{n-l}{k-l}$, por otra parte $p(n,\,k,\,l)\leqslant|B|\binom{k}{l}$. Utilizando la identidad $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}=\binom{n}{k}\binom{k}{l}$, obtenemos la desigualdad exigida. En el caso de que $l\geqslant k$ tendremos el mismo resultado.

[1] En el caso de que a no sea entero aquí se supone que $\binom{n}{a}$ es igual a 0.

1.14. 1) La cadena creciente de longitud n contiene en cada capa un vértice. En la capa B_1^n el vértice se puede escoger de n maneras. Después de que el vértice de la cadena que se encuentra en B_1^n ha sido escogido, se puede escoger de $n-1$ maneras el vértice de la cadena que se encuentra en la segunda capa, etc.

1.15. 1) Sea A el conjunto de colecciones incomparables de par en par de B^n y sea $A_i = A \cap B_1^n \cdot Z(\widetilde{\alpha})$ será el conjunto de cadenas crecientes de longitud n que contiene el vértice $\widetilde{\alpha}$. Tendremos que

$$n! \geqslant |\bigcup_{\widetilde{\alpha}\in A} Z(\widetilde{\alpha})| = \sum_{\widetilde{\alpha}\in A} |Z(\widetilde{\alpha})| = \sum_{i=0}^{n} |A_i| i! (n-i)! \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left]\frac{n}{2}\right[! \cdot \sum_{i=0}^{n} |A_i| = |A| \cdot \left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left]\frac{n}{2}\right[!$$

De aquí $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. 2) INDICACIÓN. Siempre que $i \leqslant k \leqslant n/2$ es válida la desigualdad $i!\ (n-i)! \geqslant k!\ (n-k)!$

1.16. INDICACIÓN. A cada número del tipo $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ le cotejaremos un vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de B^n. Entonces al conjunto A le corresponderá el conjunto $A' \subseteq B^n$ formado de colecciones incomparables de par en par. Empleando el resultado del problema 1.15, 1), obtendremos la afirmación.

1.17. Sean $i_1, i_2, \ldots, i_k$ los números de las coordenadas en las que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ se diferencian. Cualquier vector $\widetilde{\gamma}$ tal que $\alpha \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\beta}$ puede ser obtenido de α con la sustitución de 0 por 1 en ciertas coordenadas enumeradas. El número de procedimientos de esta sustitución es igual a 2^k.

1.18. Para B^1 la partición consiste en una única cadena $Z = \{(0), (1)\}$. Para B^2 en calidad de cadenas de partición se pueden tomar $Z_1 = \{(10)\}$ y $Z_2 = \{(00), (01), (11)\}$. Las propiedades 1) y 2) se cumplen para estas particiones. Supongamos que la afirmación está demostrada para cubos de dimensión $\leqslant n$ y la demostramos para B^{n+1}. Según la suposición existe una partición de las caras $B_0^{n+1,n+1}$ y $B_1^{n+1,n+1}$ en cadenas, que satisface las condiciones 1) y 2). Se pueden elegir las particiones en $B_0^{n+1,n+1}$ y $B_1^{n+1,n+1}$ isomorfas, o sea, tales que la cadena $Z_0 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s\}$ pertenece a la partición del cubo $B_0^{n+1,n+1}$ si, y sólo si, la cadena $Z_1 = \{\widetilde{\alpha}_1', \widetilde{\alpha}_2', \ldots, \widetilde{\alpha}_s'\}$, obtenida de Z_0 mediante la sustitución en cada colección $\widetilde{\alpha}_i$ del Z_0 cero en la $(n+1)$-ésima coordenada, por la unidad, pertenece a la partición de la cara $B_1^{n+1,n+1}$. Sean $Z_0 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s\}$ y $Z_1 = \{\widetilde{\alpha}_1', \widetilde{\alpha}_2', \ldots, \widetilde{\alpha}_s'\}$ dos tales cadenas isomorfas de las particiones de las caras $B_0^{n+1,n+1}$ y $B_1^{n+1,n+1}$. Construimos dos cadenas nuevas $\hat{Z}_0 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_s, \widetilde{\alpha}_s'\}$ y $\hat{Z}_1 = \widetilde{\alpha}_1', \widetilde{\alpha}_2', \ldots, \widetilde{\alpha}_{s-1}'$. La cadena $\hat{Z}_0$ se obtiene de Z_0 al unirle el vértice $\widetilde{\alpha}_s' \in Z_1$ y la cadena $\hat{Z}_1$ se obtiene de Z_1 al extraer el vértice $\widetilde{\alpha}_s'$. Hacemos lo mismo con cada par de cadenas isomorfas. Obtendremos la partición del cubo B^{n+1} en cadenas que no se intersecan. El cumplimiento de las condiciones 1) y 2) se comprueba fácilmente.

1.19. $2^k \sum_{i=0}^{r} \binom{n-k}{i}$.

1.20. 2) Mostraremos que la capa B_1^n es un conjunto completo siempre que $n > 2$. Sea $\widetilde{\alpha}_i$ un vector de B_1^n que tiene la i-ésima coordenada igual a la unidad. Supongamos que están dadas las distancias $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, n}$. Mostraremos cómo reconstruir $\widetilde{\beta}$. Si $\|\widetilde{\beta}\| = k > 0$, entonces es evidente que $r_i \in \{k-1, k+1\}$. Sea $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i \geqslant 2$ y sea $A(\widetilde{\beta}) = \{i : r_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j\}$. Entonces la i-ésima coordenada del vector $\widetilde{\beta}$ es igual a la unidad si $i \in A(\widetilde{\beta})$ y es igual a cero en el caso contrario. Si $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j = 1$, entonces $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$. Siempre que $n = 5$ la capa B_1^n no es un conjunto básico puesto que el conjunto {(00001), (00010), (00100), (01000)} es completo. 3) Siempre que n sea par y $k = n/2$, con cualquier $n > 1$ y $k = 0$, n. 4) Sea $A = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k\}$ un sistema completo. Veamos el sistema de igualdades $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$. Es evidente que $r_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $i = \overline{1, k}$. Cada colección, (r_1, r_2, r_k), con la que el sistema tiene solución, determina unívocamente cierto vector $\widetilde{\beta} \in B^n$. De esto se deduce que $(n+1)^k \geqslant \geqslant 2^n$. INDICACION. La evaluación superior para el número de vectores en un sistema básico se puede obtener partiendo de que el sistema de ecuaciones $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$, puede ser reducido a un sistema lineal corriente. Siempre que $k > n$ ciertas ecuaciones de este sistema se expresan en forma de combinaciones lineales por las demás. Tales ecuaciones, y en consecuencia, los respectivos vectores, pueden ser eliminados.

1.21. SUFICIENCIA. La permutación de las coordenadas de todos los vectores de B^n y también la inversión de las coordenadas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de todos los vectores de B^n no cambian las distancias mutuas entre los vértices. NECESIDAD. Sea φ la transformación del cubo B^n en sí, tal que para cualesquiera $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ es válida la igualdad $\rho(\varphi(\widetilde{\alpha}), \varphi(\widetilde{\beta})) = \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$. Examinemos el conjunto $D = B_0^n \cup B_1^n$ que es completo en B^n (véase el problema anterior). Sea $\varphi(D) = \{\varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{\alpha}_1), \ldots, \varphi(\widetilde{\alpha}_n)\}$ la imagen del conjunto D, y $\widetilde{\alpha}_i$ un vector de B_1^n que tiene la i-ésima coordenada igual a la unidad. Pongamos que $\widetilde{\beta}_i = \varphi(\widetilde{0}) \oplus \varphi(\widetilde{\alpha}_i)$, $i = \overline{1, n}$. Tenemos $\|\widetilde{\beta}_i\| = \rho(\widetilde{0}, \widetilde{\beta}_i) = \rho(\varphi(\widetilde{0}) \oplus \varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{0}) \oplus \oplus \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{0}, \widetilde{\alpha}_i) = 1$. Sea $j(i)$ el número de la coordenada del vector $\widetilde{\beta}_i$ que es igual a la unidad, $i = \overline{1, n}$. Entonces la aplicación π: $i \to j(i)$ es una permutación en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pongamos que $\pi \times \times (\widetilde{\alpha}) = (\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(n)})$ para un arbitrario $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de B^n. Mostremos que para todo $\widetilde{\gamma} \in B^n$ es válida $\varphi(\widetilde{\gamma}) = \pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0}))$. Así se demuestra la necesidad. Realmente, $\rho(\varphi(\widetilde{\gamma}), \varphi(\widetilde{0})) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{0})$, $\rho(\varphi(\widetilde{\gamma}), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}_i)$. Por otra parte $\rho(\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0})), \varphi(\widetilde{0})) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{0})$, $\rho(\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0})), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}_i)$. Evidentemente, el conjunto $\varphi(D)$ es completo en B^n lo mismo que D. De aquí se deduce que $\varphi(\widetilde{\gamma})$ y $\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0}))$ coinciden.

1.23. 1) Para $n=1$ y $k=\overline{0,1}$ la afirmación es justa. (Suponemos que $\binom{0}{k}=0$ con todos los $k=0, 1, \ldots$) Supongamos que la afirmación está demostrada para las dimensiones menores o iguales a $n-1$ y para todos los $k=0, 1, \ldots$. Sea $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y sea $\widetilde{\alpha}'=(\alpha_1', \ldots, \alpha_{n-1}')=(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Si $\alpha_1=0$ entonces es evidente que $|M_k^n(\widetilde{\alpha})|=|M_k^{n-1}(\widetilde{\alpha}')|=1+$
$+\binom{n-1-(i_1-1)}{k}+\ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+\binom{n-i_1}{k}+\ldots$
$\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Si $\alpha_1=1$, entonces $|M_k^n(\widetilde{\alpha})|=\binom{n-1}{k}+|M_{k-1}^{n-1}(\widetilde{\alpha}')|=$
$=\binom{n-1}{k}+1+\binom{n-1-(i_2-1)}{k-1}+\ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+$
$+\binom{n-i_1}{k}+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. 2) Para arbitrarios k y $\widetilde{\alpha}\in B_k^n$ al número $\mu_k(\widetilde{\alpha})=|M_k^n(\widetilde{\alpha})|$ le llamaremos número de la colección $\widetilde{\alpha}$ en la capa B_k^n. Sea $\widetilde{\alpha}\in B_k^n$ un vector las coordenadas unitarias del cual son $i_1, \ldots, i_k$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$. Entonces según lo anterior $\mu_k(\alpha)=1+\binom{n-i_1}{k}+$ $+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Supongamos también que la colección $\widetilde{\beta}\in B_l^n$ se ha obtenido de $\widetilde{\alpha}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas unitarias por ceros. Mostremos que $Z_l^n(M_k^n(\widetilde{\alpha}))=M_l^n(\widetilde{\beta})$ o, lo que es lo mismo, que $Z_l^n(M_k^n(\widetilde{\alpha}))=\{\widetilde{\gamma}: \mu_l(\widetilde{\gamma})\leqslant\mu_l(\widetilde{\beta})\}$. Mostremos primero que para todo $\widetilde{\gamma}\in B_l^n$ tal, que $\mu_l(\widetilde{\gamma})<\mu_l(\widetilde{\beta})$, existe una colección $\widetilde{\delta}\in B_k^n$ tal, que $\widetilde{\gamma}<\widetilde{\delta}$ y $\mu_k(\widetilde{\delta})\leqslant\mu_k(\widetilde{\alpha})$. Eligiremos en calidad de $\widetilde{\delta}$ la colección obtenida de $\widetilde{\gamma}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas nulas por unidades. Hay que mostrar que $\mu_k(\widetilde{\delta})\leqslant\mu_k(\widetilde{\alpha})$. Si $\mu_k(\widetilde{\delta})>\mu_k(\widetilde{\alpha})$, entonces existe tal t que $\alpha_i=\delta_i$ siempre que $i<t$, $a_t=0$, $\delta_t=1$. Al examinar las colecciones $\widetilde{\alpha}'$ y $\widetilde{\delta}'$, obtenidas respectivamente de $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\delta}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas unitarias por ceros, tenemos que $\mu_l\times$ $\times(\widetilde{\alpha}')\leqslant\mu_l(\widetilde{\delta}')$, $\widetilde{\alpha}'=\widetilde{\beta}$, $\mu_l(\widetilde{\delta}')\leqslant\mu_l(\widetilde{\gamma})$. Obtenemos una contradicción con la desigualdad $\mu_l(\widetilde{\beta})>\mu_l(\widetilde{\gamma})$. Por analogía se puede mostrar que para todo $\widetilde{\gamma}\in B_l^n$ tal que $\mu_l(\widetilde{\gamma})>\mu_l(\widetilde{\beta})$ no existe colección $\widetilde{\delta}\in M_k^n(\widetilde{\alpha})$ tal que $\widetilde{\gamma}<\widetilde{\delta}$. 3) Se deduce de 1) y 2). 4). Supongamos que $A\subseteq B_k^n$ y A no es segmento inicial de la capa B_k^n. Indicaremos el procedimiento para la construcción de tal conjunto $F\subseteq B_k^n$ que $|F|=|A|$, $\Sigma_{\widetilde{\alpha}\in F}\,\nu(\widetilde{\alpha})<\Sigma_{\widetilde{\alpha}\in A}\,\nu(\widetilde{\alpha})$, $|Z_{k-1}^n(F)|\leqslant|Z_{k-1}^n(A)|$. De esta manera se demostrará la afirmación. Designemos por $K(\widetilde{\alpha})$ el conjunto de números de las coordenadas unitarias de la colección $\widetilde{\alpha}$. Sean $\widetilde{\alpha}\in B_k^n\setminus A$ y $\widetilde{\beta}\in A$ las colecciones en las que se alcanza el mín $|K(\widetilde{\sigma})\setminus K(\widetilde{\tau})|$, donde el mínimo se toma por todos los pares $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau})$ tales que $\widetilde{\sigma}\in B_k^n\setminus A$, $\widetilde{\tau}\in A$, $\nu(\widetilde{\sigma})<$ $<\nu(\widetilde{\tau})$. Supongamos que $M=K(\widetilde{\alpha})\setminus K(\widetilde{\beta})$, $N=K(\widetilde{\beta})\setminus K(\widetilde{\alpha})$. Es evidente que $M\cap N=\varnothing$, $|M|=|N|$. Para $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ arbitrarios de B^n designaremos por

$\widetilde{\sigma}\setminus\widetilde{\tau}$ una colección del tipo $\widetilde{\sigma}\oplus(\widetilde{\sigma}\cap\widetilde{\tau})$ y sean $\widetilde{\alpha}'=\widetilde{\alpha}\setminus\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta}'=\widetilde{\beta}\setminus\widetilde{\alpha}$. Está claro que $\nu(\widetilde{\alpha}')<\nu(\widetilde{\beta}')$. Pongamos

$$D=\{\widetilde{\gamma}:\widetilde{\gamma}\in A,\ \widetilde{\alpha}'\cap\widetilde{\gamma}=\widetilde{0},\ \widetilde{\beta}'<\widetilde{\gamma};\ (\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}'\notin A\},$$
$$E=\{\widetilde{\delta}:\widetilde{\delta}=(\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}',\ \widetilde{\gamma}\in D\},$$
$$F=E\cup(A\setminus D).$$

Evidentemente, $F\subseteq B_k^n$, $|F|=|A|$ y $\sum\limits_{\widetilde{\alpha}\in F}\nu(\widetilde{\alpha})<\sum\limits_{\widetilde{\alpha}\in A}\nu(\widetilde{\alpha})$ puesto que $\nu\times$ $\times((\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}')<\nu(\widetilde{\gamma})$ para todos los $\widetilde{\gamma}\in D$. Queda por demostrar que $|Z_{k-1}^n(F)|\leqslant|Z_{k-1}^n(A)|$. Nos limitaremos a la siguiente indicación. Primero hay que mostrar que si $\widetilde{\sigma}\in Z_{k-1}^n(F)\setminus Z_{k-1}^n(A)$, entonces $\widetilde{\sigma}\cap\widetilde{\beta}'=\widetilde{0}$ y $\widetilde{\alpha}'<\widetilde{\sigma}$. Después hay que mostrar que la colección $\widetilde{e}=(\widetilde{\sigma}\setminus\widetilde{\alpha}')\cup\widetilde{\beta}'$ se contiene en $Z_{k-1}^n(A)\setminus Z_{k-1}^n(F)$. 5) INDICACIÓN. Aplicar el procedimiento de inducción por $k-l$. 6) Sea k el máximo entero con el que $a_k>0$. Entonces, siempre que $l=k-1$ la afirmación se reduce al punto 4). Al dar un paso inductivo (la inducción se hace por $k-l$) pondremos $A_l=A\cap B_l^n$, $A_i'=A\cap\left(\bigcup\limits_{j=i}^{k}B_j^n\right)$ y notaremos que

$$Z_l^n(A)=Z_l^n(Z_{l+1}^n(A_{l+1}'))\cup A_l.$$

Está claro que

$$\min_{C\subseteq B_l^n,\ |C|=m}|Z_l^n(C)|\leqslant\min_{C\subseteq B_l^n,\ |C|>m}|Z_l^n(C)|.$$

Según la suposición inductiva el mín $|Z_{l+1}^n(A_{l+1}')|$ se alcanza en el caso de que cada $Z_i^n(A)$, $i>l+1$, sea un segmento inicial de la capa B_i^n. Pero entonces por 2) el conjunto $Z_{l+1}^n(A_{l+1}')$ es segmento inicial. Entonces, con la elección de A_{l+1} se puede hacer el conjunto $Z_l^n(A)=Z_{l+1}^n(A_{l+1}')\cup A_{l+1}$ segmento inicial de la capa B_l^n. Precisamente de esto se deduce la afirmación.

1.24. Sea $A_l=A\cap B_l^n$ para cada $l=\overline{0,\ n}$. El número $T(n,m,k)$ de pares $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ tales que $\widetilde{\alpha}\in A_m$, $\widetilde{\beta}\cap\widetilde{\alpha}=0$, $\widetilde{\beta}\in B_k^n\cup B_{m+k}^n$. Del enunciado se deduce que $\widetilde{\beta}\notin A$. Por una parte, $t(n,m,k)=a_m\binom{n-m}{k}$. Por otra parte $t(n,m,$ $k)\leqslant\left(\binom{n}{m+k}-a_{m+k}\right)\binom{m+k}{m}+\left(\binom{n}{k}-a_k\right)-\binom{n-k}{m}$. De esto se deduce la afirmación.

1.25. 1) Sea $\widetilde{\alpha}$ el centro del conjunto A; entonces $A'=\{\widetilde{\alpha}\oplus\widetilde{\beta},\ \widetilde{\beta}\in A\}$ será el conjunto que hay que hallar. 2) Se puede considerar, según 1), que $\widetilde{0}$ es el centro de A. Para la construcción de A' es suficiente sustituir, para cada $i=\overline{1,\ n}$, cada colección $\widetilde{\alpha}$ de A_1^i, para la que $\widetilde{\alpha}^i\notin A$, por una colección $\widetilde{\alpha}^i$. 3) INDICACIÓN. Supongamos que $A\subseteq B^n$ tiene por centro $\widetilde{0}$ y posee la propiedad 1). Sea $S^{i,j}$ la transformación que consiste en que para cada $\widetilde{\alpha}\in A_{10}^{i,j}$

tal, que para cada $\widetilde{\alpha}^{i,j} \notin A$, la colección $\widetilde{\alpha}$ se sustituye por $\widetilde{\alpha}^{i,j}$. Ordenaremos los pares (i, j) tales que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ de la manera siguiente:

$$(1, n), (1, n-1), \ldots, (1, 2), (2, n), (2, n-1), \ldots, (2, 3), \ldots, (n-1, n).$$

Aplicando a A consecutivamente todas las transformaciones $S^{i,j}$ comenzando por $(i, j) = (1, n)$ y acabando por $(i, j) = (n-1, n)$ obtendremos el A' buscado.

1.26. 2) En calidad de A tal que $|A| = 2^{n-1}$ se puede tomar cualquier cara $(n-1)$-dimensional que contenga $\widetilde{1}$, y si n es impar se puede tomar el conjunto $\{\widetilde{\alpha} : \|\widetilde{\alpha}\| \geqslant (n+1)/2\}$. Por otra parte, si $|A| > 2^{n-1}$ entonces en A habrá dos colecciones contrapuestas, la intersección de las cuales es $\widetilde{0}$.

1.27. 1) INDICACIÓN. Examinar el conjunto $\{\widetilde{\alpha} : \|\widetilde{\alpha}\| \geqslant \left]\frac{n+k+1}{2}\right[, \widetilde{\alpha} \in B^n\}$.

1.28. 1) Por analogía a 1.25. 2) $A = \{\widetilde{\alpha} : \widetilde{\alpha} \in B^n, \|\widetilde{\alpha}\|$ es par.

1.31. 1) A cada cara $B^{n, i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ de dirección $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ se le puede recíproca y unívocamente cotejar su *código* que será el vector $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con las coordenadas $\gamma_i \in \{0, 1, -\}$, $i = \overline{1, n}$ tal, que $\gamma_{i_1} = \sigma_1 \ldots, \sigma_{i_k} = \sigma_k$ y las demás coordenadas estarán tachadas. Se pueden llenar con ceros y unidades los k lugares fijados de 2^k maneras. 4) El número que se busca es igual al número de vectores $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con k coordenadas del conjunto $\{0, 1\}$ y con $n-k$ lugares tachados. Escoger k lugares, de los n, para los símbolos de valor, o sea para el 0 y el 1, puede hacerse de $\binom{n}{k}$ maneras; se puede llenar con ceros y unidades las k lugares fijados de 2^k maneras. 6) El código de una cara k-dimensional que contenga el vértice dado $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se puede dar colocando k tachaduras en el lugar de algunas k coordenadas del vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 8) La intersección de dos caras es una cara. Se puede seleccionar una cara de dimensión j en una cara de dimensión l de $\binom{l}{j} 2^{l-j}$ maneras. Asimismo, en el código de la cara de dimensión k ya hay l coordenadas fijadas. Entre las demás $n-l$ coordenadas se tienen que colocar $k-j$ tachaduras. Eso se puede hacer de $\binom{n-l}{k-j}$ maneras.

1.33. Sean $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3$ los códigos de las caras g_1, g_2, g_3, respectivamente. Dos caras no se intersecan si, y sólo si, existe una coordenada en la que los códigos de estas caras tienen símbolos de valor, y estos símbolos son opuestos. Si las caras g_1, g_2 se intersecan, entonces el código de la intersección contiene símbolos de valor en aquellas coordenadas donde aunque sea uno de los códigos $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ tiene una coordenada de valor, además las coordenadas de valor del código de la intersección coinciden con las respectivas coordenadas aunque sea de uno de los códigos $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$. Si $\widetilde{\delta}$ es el código de la intersección de las caras g_1 y g_2, la cara g_3 no tiene vértices comunes con esta intersección, entonces se podrá encontrar un i tal que la i-ésima coordenada de los vectores $\widetilde{\delta}$ y $\widetilde{\gamma}_3$ son de valor

y no coinciden. Pero entonces la i-ésima coordenada del vector $\widetilde{\gamma}_3$ no coincide con la i-ésima coordenada de valor de uno de los vectores $\widetilde{\gamma}_1$ o $\widetilde{\gamma}_2$. Eso quiere decir que las respectivas caras no se intersecan. Es una contradicción.

1.34. El problema se reduce fácilmente al caso cuando $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^n$. Presentaremos una demostración para este caso con inducción por n. Para $n=0, 1$ la afirmación evidentemente es válida. El paso $n \longrightarrow n+1$. Sea $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i \geqslant 1$. Pongamos $n_i' = n_i - 1$. Entonces n_i' son números no negativos y $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i'} = 2^n$. Por presupuesto de inducción existe partición de cada una de las caras $B_0^{n+1,\,n+1}$ y $B_1^{n+1,\,n+1}$ del cubo B^{n+1} en caras de dimensión $n_1', \ldots, n_s'$. Elijamos estas particiones iguales, o sea tales que para cada $i=\overline{1, s}$ la unión de las caras de dimensión n_i' forma la cara g_i de dimensión n_i. Obtendremos la partición necesaria. Si $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i = 0$, entonces, sea m el número de aquellas i para las cuales $n_i = 0$. De la condición $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^{n+1}$ se deduce que m es par. Examinemos una nueva reunión $n_1', n_2', \ldots, n_{s-m/2}'$, obtenida de la anterior mediante la sustitución de m ceros por $m/2$ unidades. Construimos, como en el caso anterior, la partición del cubo B^{n+1} en caras y después ciertas $m/2$ caras de dimensión 1 se partirán en m caras de dimensión 0.

1.36. 1) EVALUACIÓN SUPERIOR. INDICACIÓN. Examinar $N = \{\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\alpha} \in B^n \; \|\widetilde{\alpha}\|$ es par$\}$. EVALUACIÓN INFERIOR. Sea $N \subseteq B^n$, $|N| < 2^{n-1}$. Existe (véase 1.31, 1.34) una partición del cubo B^n en caras no intersecadas de dimensión 1. El número de caras en tal partición es igual a 2^{n-1}. De esto se deduce que aunque sea una de las caras no contiene vértices de N. 3) INDICACIÓN. Examinar $N = \{\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\alpha} \in B^n,\ \|\widetilde{\alpha}\| \equiv 0 \pmod 3\}$ o $N_1 = \{\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\alpha} \in B^n,\ \nu(\widetilde{\alpha}) \equiv 3 \pmod 4\}$. 4) EVALUACIÓN INFERIOR. Observaremos que para que el vértice $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se contenga en una cara $(n-2)$-dimensional con el código $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (véase la resolución del problema 1.31) que tiene coordenadas de valor en los lugares de orden i y j, es necesario que $\alpha_i = \gamma_i$, $\alpha_j = \gamma_j$. Sea $N \subseteq B^n$, $|N| = m$ un conjunto tal, que en cada cara $(n-2)$-dimensional se contiene el vértice $\widetilde{\alpha}$ de N. Examinemos la matriz binaria M, cuyas filas son vectores de N. De la observación anterior se deduce que para cada par de números (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ y cualquier par (σ, τ), $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ tiene que haber una fila $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $\alpha_i = \sigma$, $\alpha_j = \tau$. De esto se deduce que cualesquiera dos columnas de la matriz M son incomparables de par en par. El número de colecciones binarias de longitud m incomparables de par en par no sobrepasa a $\binom{m}{[m/2]}$. De aquí que $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. EVALUACIÓN SUPERIOR. Sea m el menor entero tal, que $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. Construimos una matriz binaria M con m filas y n columnas incomparables de par en par. Añadimos a la matriz M las filas $\widetilde{0}$ y $\widetilde{1}$. Entonces la colección de vectores-filas obtenida será «punzante» para el conjunto de todas las caras $(n-2)$-dimensionales del cubo B^n.

1.37. Para $n=1, 2$ la afirmación es evidente. Supongamos que $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n}$ es ciclo en B^n. Sea $\widetilde{\beta}\sigma$, donde $\widetilde{\beta} \in B^n$, $\sigma \in \{0, 1\}$ es el vector de longitud $n+1$, cuyas primeras n coordenadas coinciden con las respectivas coordenadas de la colección $\widetilde{\beta}$, y la $(n+1)$-ésima coordenada es igual a σ. Entonces la sucesión $\widetilde{\alpha}_1 0, \widetilde{\alpha}_2 0, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n} 0, \widetilde{\alpha}_{2^n} 1, \ldots, \widetilde{\alpha}_2 1, \widetilde{\alpha}_1 1$ es un ciclo en B^{n+1} que contiene todos sus vértices.

1.39. 1) Sí. 2) No. 3) Sí. 4) Sí.

1.43. INDICACIÓN. Observar que si las colecciones $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ y $\widetilde{\sigma}' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$ son comparables, entonces una de las sumas $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i'} a_i$ es mayor que la unidad en su valor absoluto.

§ 2

2.1. $2^{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$. **2.2.** 2 $(n \geqslant 1)$. **2.3.** $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{k-1}$ donde $m = 2^n$ $(n \geqslant 1, k \geqslant 1)$. **2.7.** 2^{n+1} $(n \geqslant 1)$. **2.10.** 1) De 5 maneras. 2) De 9 maneras.

2.12. 1) BASE DE INDUCCIÓN. Si la complejidad de la fórmula es igual a la unidad (sobre el conjunto de enlaces $M = \{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$), entonces esta fórmula tiene una de las formas siguientes: $(\neg x)$, $(x \& y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$ (con exactitud hasta la designación de las variables). Por eso la afirmación es evidente para las fórmulas de complejidad 1. PASO INDUCTIVO. Sea la afirmación válida para todas las fórmulas (sobre el conjunto de enlaces M) que tienen una complejidad no mayor del número l $(l \geqslant 1)$. Tomemos una fórmula arbitraria $\mathfrak{A}$ (sobre M), cuya complejidad es igual a $l+1$. Consideremos, para la determinación, que $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ (los demás casos se examinan en forma analógica). Es evidente que el enlace $\vee$ que se encuentra entre las fórmulas $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ tiene un índice igual a 1. Siguiendo, si el enlace en la fórmula $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{C}$), examinado como enlace de la fórmula $\mathfrak{B}$ (respectivamente, de $\mathfrak{C}$), tiene el índice mayor que 1, entonces en la fórmula $\mathfrak{A}$ el índice de este enlace no puede ser disminuido. Si en enlace en $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{C}$) tiene un índice igual a 1, entonces en la fórmula $\mathfrak{A}$ su índice será igual a 2 (el índice se aumenta porque en la fórmula $\mathfrak{A}$ ante la subfórmula $\mathfrak{B}$ hay un paréntesis izquierdo).

2.15. 3) (0 1 0 0). **2.18.** 3) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ **2.19.** 2) $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = x$, $f_3(x, y) = y$, $f_4(x, y) = x \oplus y$. **2.20.** 1) $((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y))$. 2) $((x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)))$. **2.21.** 1) $((x \mid y) \mid (x \mid y))$. 2) $((x \vee (x \vee y)) \sim y)$. 3) No se puede.

2.22. 2) La función que se realiza con una fórmula sobre el conjunto $\{\rightarrow\}$ toma el valor 1 no menos que en la mitad de las colecciones de valores de los argumentos. La función xy no satisface esta condición.

2.23. Hablando en general, no se puede. Ejemplo: $S = \{\neg\}$, *la función* x no es realizable sobre la S fórmula de profundidad par.

2.24. Si sobre el conjunto S se realizan sólo funciones constantes, entonces la afirmación es evidente. Supongamos que sobre S es realizable cierta función $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv$ const. Identificando todas las variables en la función $f(\widetilde{x}^n)$ y en la

fórmula que la realiza, obtenemos la función $\varphi(x)$ (y la fórmula $\mathfrak{A}(x)$ que le corresponde). Hay que examinar los tres casos siguientes: a) $\varphi(x)$ es una constante, b) $\varphi(x) = x$ y c) $\varphi(x) = \bar{x}$. Al obtener (en los casos a) y b)) una fórmula que realiza la función x (y que tiene una profundidad de no menos de 1), podemos construir para cada función concreta, que se realiza con una fórmula sobre S, una fórmula que tenga una profundidad tan grande como se quiera. Sea $\varphi(x) \equiv 0$. Entonces se encontrará una colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ en la que la función f es igual a 1. Sustituiremos todas las x_i que corresponden a $\alpha_i = 1$ por x, y las demás x_i por $\varphi(x) \equiv 0$. Obtendremos la función $\psi(x) = x$. Si $\varphi(x) \equiv 1$, entonces de manera análoga se obtiene la función $\bar{x}$.

2.26. 2) $x \vee y = (x \to y) \to y$. 3) $x \sim y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$.

2.30. 2) Hablando en general, no se puede. Ejemplo: $\mathfrak{A} = y_2 \to x$, esta fórmula no es idénticamente verdadera; sin embargo la fórmula $S^{x}_{y_1 \to y_2}\, \mathfrak{A} \,|= y_2 \to (y_1 \to y_2)$ es idénticamente verdadera.

2.31. 1) Si se supone que $f(0, 0) = 0$, entonces tomando $x = y = z = 0$ tenemos $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = 0$, lo que contradice a las condiciones del problema. Así que $f(0, 0) = 1$. Suponiendo además que $f(0, 1) = 0$ tenemos (con $x = y = z = 0$) que $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 1), f(1, 1)) = f(0, f(1, 1))$ y, según las condiciones del problema, se tiene que cumplir la relación $f(1, 1) = 0$. Pero, examinando después $x = 0$, $y = z = 1$, vemos que $f(f(0, f(1, 1)), f(f(0, 1), f(0, 1))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = 0$, y eso contradice el enunciado del problema. Así que $f(0, 1) = 1$. Finalmente, suponemos que $f(1, 1) = 0$. Haciendo $x = y = 0$ y $z = 1$ obtenemos $f(f(0, f(0, 1)), f(f(0, 0), f(0, 1))) = f(f(0, 1), f(1, 1)) = f(1, 0)$. Tomando en cuenta las condiciones del problema tenemos $f(1, 0) = 1$. Pero entonces $f(f(1, f(1, 1)), f(f(1, 1), f(1, 1))) = f(f(1, 0), f(0, 0)) = f(1, 1) = 0$ lo que contradice las condiciones del problema. En consecuencia, también $f(1, 1) = 1$. Así que $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 1$. Eso quiere decir que $f(x, y) = x \to y$, o bien $f(x, y) \equiv 1$. Luego las equivalencias a) — e) se comprueban directamente (por ejemplo utilizando las equivalencias básicas). 2) No, no se deducen. Es suficiente examinar la función $f(x, y) = x \sim y$.

§ 3

3.6. 2^n. 3.7. 1) 2^{n-1}; 2) $2^n - 2$; 3) 2^{n-1}. 3.8. 1) $k \cdot l$; 2) $k \cdot 2^m + l \cdot 2^n - k \cdot l$; 3) $k(2^m - l) + l(2^n - k)$. 3.9. 2) $f_0^1(\tilde{x}^3) = x_2 x_3$, $f_0^2(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1$, $f_{01}^{1,\,3}(\tilde{x}^3) = x_2$. 3.11. $2^{(3/4) \cdot 2^n}$. 3.12. 12. 3.16. 4. 3.18. $\binom{n}{r}$. 3.19. $2^{S_n^r} - 2^{S_n^{r-1}}$ donde $S_n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$. 3.20. 0, si k es impar, $\binom{2^{n-1}}{h}$ si k es par. 3.23. $\tilde{\beta}_P = (1101111011100111)$. 3.26. $f(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$.

3.29. INDICACIÓN. Observar que con $k = 1$ el polinomio se convierte en unidad en 2^{n-1} colecciones. Utilizando la fórmula de descomposición, hacer la demostración con inducción por k.

3.30. 1) $2^{n-k}+2^k-2$; 2) $\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$.

3.31. Para $n=1$ la afirmación es evidente. Paso inductivo de $n-1$ a n. Si $l \leqslant 2^{n-1}$, entonces por suposición inductiva existe un polinomio $P(\widetilde{x}^{n-1})$ de longitud $\leqslant n-1$ para el cual $|N_P|=l$. Entonces el polinomio $x_n P(\widetilde{x}^{n-1})$ se convierte en 1 en l vértices del cubo B^n. Si $2^{n-1}<l\leqslant 2^n$, entonces examinaremos el polinomio $P(\widetilde{x}^{n-1})$ que se convierte en unidad en 2^n-l vértices del cubo B^{n-1}. Entonces el polinomio $x_n P(\widetilde{x}^{n-1})\oplus 1$ es el buscado.

§ 4

4.4. INDICACIÓN. Supongamos que $K=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $L=x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$ y $K^\circ L$ es la c.e. obtenida de K al tachar aquellas letras $x_i^{\alpha_i}$ para las cuales $\alpha_i \neq \beta_i$. Observemos que cada implicante de la función $f(\widetilde{x}^n)$ se puede presentar en la forma $K^\circ L$, en donde K y L son c.e. adecuadas de la f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$, y puede ser que sean coincidentes.

4.5. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-1}; 3) $3\cdot 2^{n-3}$; 4) 2^{n-2}; 5) $k+(n-k)(n-k-1)$.

4.6. 1) $\binom{l}{k}\binom{n-l}{k+m-l}$.

4.8. 2) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3x_4$.

4.9. 1) $2^{2^n-2^{n-r}}$; 2) $2^{2^n-2^{n-r}}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}2^{-i\cdot 2^{n-r}}$.

4.11. 1) $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_4$.

4.12. 1) $\bar{x}_1x_3$, x_1x_2. $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$, $\bar{x}_2x_3x_4$.

4.13. INDICACIÓN. Mostrar que ningunas dos colecciones propias de dos implicantes nucleares diferentes no son adyacentes; utilizar el hecho de que el conjunto $N\subset B^n$ tal que $|N|>2^{n-1}$, siempre contiene una arista (véase 1.44).

4.14. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-3}; 3) 0; 4) 2^{n-2}; 5) k.

4.15. $2^{2^n-2^{n-r}}(1-(1-2^{-r})^{2^{n-r}})$.

4.18. 1) 1; 2) $5^{2^{n-r}}$; 3) $5^{2^{n-1}}$; 4) 1.

4.22. Una. Mostrar que todas las implicantes simples son nucleares.

4.23. INDICACIÓN. Hacer la inducción por n, utilizando la descomposición (3) de la función por las variables.

4.24. 1) Para dos funciones. 2) Para 2^{n+1} funciones.

4.25. Por ejemplo $k=n2^n-1$.

4.27. 0 si $k\neq 0$, $k+m<n$; $\binom{n}{m}$ si $k=0$; $\binom{n}{k}$ si $k+m=n$. 2) En dos si n es par y en cuatro si n es impar.

§ 5

5.2. 1) x_3; 2) x_1; x_2 3) x_4; 4) x_1. 5.4. 1) x_2; x_3; 2) x_1, x_3; 3) x_3. 5.7. m. 5.8. 1) x_1, x_2, x_3, x_4; 2) x_1, x_2, x_3; 3) x_3, x_4; 4) x_1, x_2, x_4.

5.10. 1) $n \geqslant 3$; 2) con ningún n; 3) $n \geqslant 3$; 4) con n pares; 5) con $n = 4k - 2$, $k = 1, 2, \ldots$

5.12. 2) $|P_2^c(X^3)| = 218$.

5.13. INDICACIÓN. Del enunciado del problema deducir que existen unas colecciones $\widetilde{\alpha}'$, $\widetilde{\beta}'$, $\widetilde{\gamma}'$ tales, que $\rho(\widetilde{\alpha}', \widetilde{\beta}') = \rho(\widetilde{\beta}', \widetilde{\gamma}') = 1$. Supongamos que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}'$ se diferencian en el i-ésimo, y $\widetilde{\beta}'$ y $\widetilde{\gamma}'$ en el j-ésimo lugar de orden. Entonces las variables x_i y x_j son sustanciales.

5.14. INDICACIÓN. Es suficiente mostrar que si x_i o $\bar{x}_i$ entran en cierta implicante simple K de la función f, entonces x_i es una variable sustancial. Al tachar x_i^σ de K eso lleva a la c. e. K', que no es implicante. De esto se deduce la existencia de la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\sigma}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $K'(\widetilde{\alpha}) = 1$, pero $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Al mismo tiempo $f(\widetilde{\alpha}^i) = 1$, puesto que $K(\widetilde{\alpha}^i) = 1$. De esto se deduce la sustancialidad de x_i.

5.15. INDICACIÓN. Si x_i entra explícitamente en el polinomio $P(\widetilde{x}^n)$, entonces al último se le puede escribir en la forma $x_iQ \oplus R$, donde Q y R son polinomios no dependientes de x_i y $Q \not\equiv 0$. Sea la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $Q(\widetilde{\alpha}) = 1$; entonces $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = x_i \oplus R(\widetilde{\alpha})$. Ahora la afirmación se deduce del problema 5.1, 1).

5.16. No es cierto. INDICACIÓN. Examinar $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

5.17. INDICACIÓN. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ satisface la condición. Entonces existe tal entero i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: que para cualesquiera $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ tales que $\widetilde{\alpha} \in B_i^n$, $\widetilde{\beta} \in B_{i-1}^n$, $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$. La afirmación se deduce ahora de que para todo i en $B_{i-1}^n \cup B_i^n$ hay aristas de cualquiera de las i direcciones.

5.18. INDICACIÓN. Véase 5.13.

5.19. Si $f(\widetilde{x}^n)$ se expresa con un polinomio de grado mayor que la unidad, entonces sin limitación de generalidad se le puede presentar en la forma $x_1x_2P_1 \oplus x_1P_2 \oplus x_2P_3 \oplus P_4$, donde $P_1 \not\equiv 0$ y P_1, P_2, P_3, P_4 dependen de las variables $x_3, \ldots, x_n$. Sea $\widetilde{\alpha}$ $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ una colección tal, que $P_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Entonces el componente $f_{\alpha_3 \ldots, \alpha_n}^{3, \ldots, n}(\widetilde{x}^n)$ tiene la forma $x_1x_2 \oplus \lambda_1x_1 \oplus \lambda_2x_2 \oplus \lambda_3$ y, en consecuencia, este componente depende sustancialmente de x_1 y x_2. De esto se deduce que las tres colecciones buscadas se encontrarán en la cara $B_{\alpha_3 \ldots, \alpha_n}^{n; 3, \ldots, n}$.

Si $f(\widetilde{x}^n)$ se expresa con un polinomio de primer grado y depende sustancialmente de x_1 y x_2, entonces para cualquier colección $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cualesquiera tres vértices en la cara $B_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}^{n; 3, \ldots, n}$ son los buscados.

5.21. Supongamos lo contrario. Sin limitación de generalidad se puede considerar que entre todos los componentes del tipo $f_\alpha^i(\widetilde{x}^n)$ el componente $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ es el que tiene el mayor número de variables sustanciales. Entonces la suposición es equivalente a que $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ depende ficticiamente de cierta variable, por ejemplo de x_2, o sea que $f_1^1 = f_{11}^{1,2} = f_{10}^{1,2}$. Como x_1 es una variable sustancial se cumple aunque sea una de las relaciones $f_{10}^{1,2} \neq f_{00}^{1,2}$, $f_{11}^{1,2} \neq f_{01}^{1,2}$. Supon-

gamos, por ejemplo, que $f^{1,2}_{11} \neq f^{1,2}_{01}$. Entonces la función

$$f_1^2 = \bar{x}_1 f^{1,2}_{01} \vee x_2 f^{1,2}_{11}$$

depende sustancialmente de x_1 y de todas las variables sustanciales de la subfunción $f^{1,2}_{11} = f_1^1$. Esto contradice a que f_1^1 tiene el mayor número de variables sustanciales.

5.22. 1) Es cierto. Se deduce del problema anterior. 2) No es cierto. INDICACIÓN. Examinar $f(\tilde{x}^3) = x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3$ y las variables x_1, x_2.

5.23. 1) $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$; 2) 1; 3) x_1, x_2; 4) $x_2 \overline{\rightarrow x_1}$, $x_1 \sim x_2$, 1. 5.25. 6. 5.26. Se puede; INDICACIÓN. Examinar la función $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4$.

5.27. Los números de las coordenadas de las colecciones $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ se pueden dividir en los cuatro grupos siguientes:

$$A_1 = \{i\colon \alpha_i = \beta_i = \gamma_i\}, \quad A_2 = \{i\colon \alpha_i = \beta_i,\ \beta_i < \gamma_i\},$$
$$A_3 = \{i\colon \alpha_i < \beta_i,\ \beta_i = \gamma_i\}, \quad A_4 = \{i\colon \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1\}.$$

Sean $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \sigma$, $f(\tilde{\beta}) = \tilde{\sigma}$. Entonces si $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = \sigma$, suponemos que $x_i = x$, si $i \in A_1 \cup A_2$; que $x_i = y$, si $i \in A_3 \cup A_4$. Si $f(\tilde{0}) = \sigma$, $f(\tilde{1}) = \tilde{\sigma}$, entonces suponemos que $x_i = x$ si $i \in A_i$; que $x_i = y$ si $i \in A_2$; que $x_i = z$ si $i \in A_3 \cup A_4$. Si $f(\tilde{0}) = \tilde{\sigma}$, entonces suponemos que $x_i = x$ si $i \in A_1 \cup A_2$; que $x_i = y$ si $i \in A_3$; que $x_i = z$ si $i \in A_4$. La dependencia sustancial de las funciones obtenidas se deduce del problema 5.13.

5.29. $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$ con $n \geqslant 2$; $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} \vee x_3^{\sigma_3}x_1^{\sigma_1}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, 3}$ con $n = 3$; $x_1^{\sigma}x_2^{\bar{\sigma}}$, $x_1^{\sigma} \vee x_2^{\bar{\sigma}}$ con $n = 2$.

5.30. La función obtenida de $f(\tilde{x}^n)$ mediante la identificación de las variables x_i, x_j tiene la forma $x_i f^{i,j}_{11} \vee \bar{x}_i f^{i,j}_{00}$. De la condición se deduce que por lo menos uno de los componentes $f^{i,j}_{11}$, $f^{i,j}_{00}$ no es idénticamente igual a cero.

5.33. INDICACIÓN. Por lo menos una de las funciones f, g se convierte en unidad en un número impar de colecciones.

5.34. INDICACIÓN. Véase 5.30.

Capítulo II

§ 1

1.2. No, no se deduce. Se puede poner (por definición) para cualquier conjunto M de P_2 (incluyendo también el vacío) $[M] = P_2$, o sea introducir una operación tal de clausura. Entonces las relaciones 1) —3) del problema 1.1 se cumplirán evidentemente, y la relación 4) no se cumplirá.

1.3. 1) Sí. 2) No. 3) No. 4) Sí. 5) Sí. 6) No. 7) No.

1.4. 1) {1}. 2) $\{0, 1, x_1, \bar{x}_1\}$. 3) $\{x_1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$; 4) $\{1, x_1, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

1.5. Sea $f(\widetilde{x^n})$ una función de una clase cerrada que depende sustancialmente de todas sus variables ($n \geqslant 2$). Entonces la función $f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_2, \ldots, x_n) = f(f(y_1, y_2, \ldots, y_n), x_2, \ldots, x_n)$ depende sustancialmente de todas las $2n-1$ variables (aquí: $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \cap \{x_2, \ldots, x_n\} = \phi$). Después en la función f_1 en lugar de la variable y_1 se puede poner la función $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y obtener una función dependiente sustancialmente de $3n-2$ variables, etc.

1.6. $[0]$, $[1]$, $[x]$, $[0, 1]$, $[0, x]$, $[1, x]$, $[x, \bar{x}]$, $[0, 1, x]$, $[0, 1, x, \bar{x}]$.

1.7. 1) Sí. 2) No, no siempre. 3) No, no siempre (son exclusiones sólo todos los P_2 y su complemento, la clase cerrada vacía ϕ).

1.8. 3) $(x \to y) \to y = x \vee y$, $\bar{x} = \overline{x \oplus x \oplus x}$. 4) De la segunda función mediante la identificación de todas las variables se obtiene la negación. 5) 5) $m(x, y, 0) = xy$, $x^0 \oplus 0 = \bar{x}$.

1.9. 1) $K_1 \subseteq K_2$ pero puede haber también una inclusión rigurosa $K_1 \subset K_2$. 2) $K_1 \not\supseteq\not\subseteq K_2$; por ejemplo con $M_1 = \{xy, \bar{x}\}$ y $M_2 = \{\bar{x}\}$ tenemos $K_1 = [xy]$, y $K_2 = P_2 \setminus [\bar{x}]$. 5) Véase 1.9, 2).

1.10. 2) $M_1 = | x, 0 |$, $M_2 = | x, 1 |$. 3) $M_1 = | \bar{x}, 0 |$, $M_2 = | 0 |$. 5) Véase 1.10, 2).

1.11. 1) $\{0, \bar{x}\}$. 2) $\{1, x \oplus y\}$. 3) $x \vee y$, $x \cdot y \cdot z\}$. 4) $\{x \oplus 1, m(x, y, z)\}$ puesto qe $x \oplus y \oplus z = m(m(x, y, \bar{z}), m(x, \bar{y}, z), m(\bar{x}, y, z))$ y en la clase cerrada $[m(x, y, z)]$ cualquier función que dependa sustancialmente de un argumento es igual a la función idéntica.

1.12. Sea M una clase precompleta (en P_2). Eso quiere decir que $[M] \neq P_2$ pero con cualquier función $f \in P_2 \setminus M$ tenemos $| M \cup \{f\} | = P_2$. Si $[M] \neq M$, entonces se podrá encontrar una función g de $[M] \setminus M$ tal que $[M] = [M \cup \{g\}] = P_2$. Resulta una contradicción.

1.13. Si $M_2^1 = M^1$, entonces la afirmación es evidente. Sean $M_2^1 \neq M^1$. Supongamos que $M_1^1 = M_2^1$. Como M_1 y M_2 son clases cerradas y $M_1^1 \subset M_1$ y $M_2^1 \subset M_2$, entonces cualquiera que sea la función f de M_1 (o de M_2), poniendo en el lugar de sus variables funciones de M_1^1 ($= M_2^1$), dependientes de la misma variable x, obtenemos de nuevo una función de M_1^1. Pero esto quiere decir que añadiendo a M_1 una función arbitraria g de $M_2 \setminus M_1$ ($\neq \phi$) tenemos $[M_1 \cup \{g\}] \cap M^1 = M_1^1 \neq M^1$, y eso contradice la precomplitud de la clase M_1 en la clase M.

1.14. 1) $[0, 1, x]$, $[\bar{x}]$. 2) $[0]$, $[1]$. 4) $[0, x]$, $[x \vee y]$.

1.15. 1) No, no es. 3) No, no es.

1.16. Si $x \in M$ entonces la afirmación es evidente. Sea $x \notin M$. Según la definición de la operación de superposición la sustitución de una función idéntica se puede considerar como una transformación que se hace sólo en el conjunto M en concordancia con la operación de superposición. Eso quiere decir que $[M \cup \{x\}] \subseteq M \cup \{x\}$. La inclusión inversa se deduce de las propiedades de la operación de clausura.

1.17. La afirmación se deduce de que la función $x \mid y$ forma en P_2 un sistema completo.

1.18. Sea $f(\widetilde{x^n}) \not\equiv$ const. Si identificando todas las variables en la función $f(\widetilde{x^n})$ obtenemos una función idéntica o una negación, entonces la afirmación

es evidente. Sea $f(x, \ldots, x) = \text{const}$. Para que esté todo determinado pongamos que $f(x, \ldots, x) \equiv 0$. Como $f(\widetilde{x^n}) \not\equiv \text{const}$, pues existe una colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Pongamos que $x_i = x$ si $\alpha_i = 1$ y que $x_i = y$ si $\alpha_i = 0$. Entonces de la función f obtendremos la función $g(x, y)$ que satisface las condiciones: $g(0, 0) = g(1, 1) = 0$, $g(1, 0) = 1$. Si $g(0, 1) = 1$, entonces $g(x, y) = x \oplus y$; si $g(0, 1) = 0$ entonces $g(x, y) = \overline{x \to y}$. Es evidente que $| x \oplus y | \ni x$ y $| \overline{x \to y} | \ni x$.

1.20. Como el conjunto P_2 es infinito-numerable, pues el conjunto de todos sus subconjuntos finitos también es infinito-numerable. Por eso la potencia de todas las clases cerradas en P_2 que tienen sistemas completos finitos no es más que numerable.

1.21. Si una clase cerrada en P_2 es diferente de los conjuntos $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$: entonces contiene una función idéntica (véase el problema 1.18); consecuentemente no se le puede ampliar hasta una base.

1.22. Sea $\mathscr{P}$ un sistema completo en M. Tomemos $\mathscr{P}$ la función arbitraria f_1. Ella no pertenece a ninguna de las clases $K_1, \ldots, K_{r_1}$ precompletas en M. Después eligiremos en $\mathscr{P}$ la función f_2 que no pertenece aunque sea a una de las clases precompletas que quedan, etc. El número de funciones que se obtienen con este proceso en el sistema $\mathscr{P}'$ no es mayor que el número de clases precompletas en M. El sistema $\mathscr{P}'$ es completo en M puesto que en el caso contrario se ampliaría hasta alguna clase precompleta, y al construirlo, el sistema $\mathscr{P}'$ no se contiene totalmente en ninguna de las clases precompletas en M. Si $\mathscr{P}$ es una base, entonces en la construcción del sistema respectivo $\mathscr{P}'$ deben de ser utilizadas todas las funciones de $\mathscr{P}$ pues de otra manera llegaríamos a la contradicción con la irreducibilidad del sistema $\mathscr{P}$.

1.23. La demostración se puede hacer con inducción por el número de entradas del enlace $\to$ en las fórmulas que realizan las funciones de la clase cerrada $[x \to y]$. Si en la fórmula hay una entrada del enlace $\to$, entonces la fórmula (con exactitud hasta la designación de las variables) tiene una de las formas siguientes: $x \to x$ y $x \to y$. En este caso la afirmación es evidente. Luego, si $\mathfrak{A} = f_1 \to f_2$, entonces hay que examinar dos posibilidades.

(a) La fórmula que corresponde a la función f_2 tiene aunque sea una entrada del enlace $\longrightarrow$. Entonces $f_2 = y_j \vee \varphi_2(\widetilde{y^m})$ y $\mathfrak{A} = f_1 \vee f_2 = y_j \vee (f_1 \vee \varphi_2)$.

(b) La fórmula que responde a la función f_2 representa en sí una variable (digamos y). Entonces $\mathfrak{A} = f_1 \vee y$.

1.24. Utilicemos la inducción por el número de entradas del enlace $\to$. Si el enlace $\to$ entra una vez, entonces tendremos $x \to y$, y la afirmación será evidente. Sea $\mathfrak{A} = f_1(\widetilde{x^n}) \to f_2(\widetilde{x^n})$ y que la función f que responde a la fórmula $\mathfrak{A}$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Si f_2 satisface la condición del problema, entonces $| N_{f_2} | > 2^{n-1}$ y $| N_f | \geqslant | N_{f_2} | > 2^{n-1}$. Sea ahora que f_2 depende sustancialmente de una variable. Supongamos, para que esté todo determinado, que $f_2 = x_1$ (f_2 no puede ser igual a la negación de la variable, puesto que $\bar{x} \notin [x \to y]$). Con esta suposición $f = f_1 \vee x_1$. Es evidente que $f(1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$. Si fuese $f(0), x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, entonces $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1$ y esto contradice a que la función $f(\widetilde{x^n})$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. En consecuencia $f(0, x_2, \ldots,$

$\ldots, x_n) \not\equiv 0$ y $|N_f| > 2^{n-1}$. Por fin, si la función f_2 depende de todas las variables $x_1, \ldots, x_n$ insustancialmente, entonces $f_2 \equiv 1$, pero $f \equiv 1$, o sea que también depende insustancialmente de todas las variables $x_1, \ldots, x_n$.

1.25. Sea K una clase precompleta en P_2. Supongamos, que $x \notin K$. En virtud del problema 1.16 la añadidura de la función x a la clase K no lleva a un sistema completo en P_2 (pues $[K \cup \{x\}] = K \cup \{x\} \not\ni x \mid y$). Esto contradice la precomplitud de la clase K.

§ 2

2.1. 2) No. 5) Sí. 2.3. 1) $xz \vee yt$. 3) $xy \oplus y \oplus 1$.

2.4. Emplear inducción por el número de entradas de los enlaces del conjunto $\{0, 1, \neg, \&, \vee\}$ en la fórmula $\mathfrak{A}$.

2.6. Supongamos que $i=1$ o sea que la función $f(\tilde{x}^n)$ dependa sustancialmente de la variable x_1. Entonces se podrán encontrar las colecciones $\tilde{\alpha}=(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\alpha}'=(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tales, que $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha}')$. Como $f^* \times$ $\times (1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \overline{f}(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $f^*(0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \overline{f}(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, entonces $f^*(1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) \neq f^*(0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, o sea que x_1 es una variable sustancial de la función $f^*(\tilde{x}^n)$.

2.8. 1) 0. 2) 2^{n-1}. 3) 1. 2.9. 1) Sí. 4) No. 5) Sí.

2.10. Emplear la descomposición: $f(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.11. Si $f(\tilde{x}^n)$ es una función autodual, entonces en cualesquiera dos colecciones contrapuestas de valores de las variables ella toma valores opuestos. En consecuencia, el número de colecciones en las que la función autodual $f(\tilde{x}^n)$ toma el valor 1 es igual al número de pares de colecciones contrapuestas (de longitud n), o sea $|N_f| = 2^{n-1}$.

2.13. $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i 2^{2^{n-1-i}}$, $n \geqslant 1$.

2.14. $x \oplus y \oplus z$, $x \oplus y \oplus z \oplus 1$, $m(x, y, z)$, $m(x, y, z) \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus y \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z \oplus 1$. Con facilidad se comprueba que $m(x, y, \bar{z}) = m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, \bar{y}, \bar{z}) = m(x, y, z) \oplus$ $\oplus y \oplus z \oplus 1$, $m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = m(x, y, z) \oplus 1$.

2.15. 1) Con $n = 3$. 2) Con $n = 4m + 3$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ 3) Con ningún $n \geqslant 2$ la función no es autodual pues $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$. 4) Con $n \geqslant 3$ impares.

2.16. Sólo con n impares.

2.17. 3) $g(\tilde{y}^5) = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_5 \in S$, $m(\bar{x}_1, x_3, f) \in S$ y $m(x_2, x_3, f) \in S$. Si $f \in S$. Sustituyendo en $g(\tilde{y}^5)$ en el lugar de y_1 la función $m(\bar{x}_1, x_3, f) = \bar{x}_1 f \oplus x_3 f \oplus \bar{x}_1 x_3$; en el lugar de y_2 la función $m(x_2, x_3, f) =$ $= x_2 f \oplus x_3 f \oplus x_2 x_3$; en el lugar de la variable y_3 la variable x_2, y en el lugar de y_4 y de y_5 las variables x_4 y x_5 respectivamente, obtendremos $\bar{x}_1 f \oplus x_3 f \oplus$ $\oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus x_2 f \oplus x_3 f \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 = \bar{x}_1 f \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_2 f \oplus x_2 x_3 \oplus x_4 \oplus$ $\oplus x_5$.

2.18. 1) Tenemos $\overline{f(\widetilde{x}^n) \vee f^*(\widetilde{x}^n)} = \overline{f(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \equiv \text{const}$. Esta constante no puede ser 0, puesto que en el caso contrario se tiene que cumplir la relación $f(\widetilde{x}^n) \equiv 1$. Por eso $f(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \equiv 0$. Partiendo de la igualdad $|N_f| = |N_{f^*}|$, deducimos que cada una de las funciones $f(\widetilde{x}^n)$, $f^*(\widetilde{x}^n)$ y $f'(\widetilde{x}^n) = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ tiene un número de ceros igual al número de unidades, o sea, $|N_f| = |N_{f^*}| = |N_{f'}| = 2^{n-1}$. En consecuencia, en virtud de la relación $f \cdot f' \equiv 0$, $f(\widetilde{\alpha}^n) = 0$ si, y sólo si, $f'(\widetilde{\alpha}^n) = 1$. En consecuencia, $f(\widetilde{x}^n) \equiv f^*(\widetilde{x}^n)$.

2.19. 3) $(x \downarrow x) \rightarrow (x \oplus \bar{x}) = 1$.

2.20. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función no autodual y todas sus n variables ($n \geqslant 3$) sustanciales. De la no autodualidad de f se deduce que existen dos colecciones contrapuestas, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\widetilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, en las que la función f toma los mismos valores. Primero suponemos que $f(\widetilde{0}^n) \neq f(\widetilde{1}^n)$ y en consecuencia $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}^n$ y $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}^n$. Examinemos la función $g(x, y)$ la que se obtiene de $f(\widetilde{x}^n)$ como resultado de la sustitución por x de toda variable x_i tal, que $\alpha_i = 0$ y de la sustitución por y de cada una de las variables que quedan. Tenemos que $g(0, 0) \neq g(1, 1)$ y $g(0, 1) = g(1, 0)$. Es evidente que $g(x, y) \notin S$. Supongamos ahora que $f(\widetilde{0}^n) = f(\widetilde{1}^n)$. Como $f(\widetilde{x}^n) \equiv \text{const}$ (pues depende sustancialmente de no menos que de tres variables), entonces se podrá encontrar una colección $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal, que $f(\widetilde{\beta}) \neq f(\widetilde{0}^n)$. Partiendo de la colección $\widetilde{\beta}$ construimos la función $h(x, y)$: si $\beta_i = 0$, entonces en $f(\widetilde{x}^n)$ sustituimos a la variable x_i por x, si $\beta_i = 1$, entonces sustituimos a x_i por y. La función $h(x, y)$ satisface las siguientes relaciones: $h(0, 0) = h(1, 1) \neq h(0, 1)$. Es evidente que $h(x, y)$ depende sustancialmente de dos variables y es no autodual.

2.21. Véase el problema anterior.

2.22. No es difícil mostrar (véase el problema 2.14) que $m(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma) = x^{m(\alpha, \beta, \gamma)}$. Si $m(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, entonces $m(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma) = \bar{x}$. En consecuencia colocando en $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$ en el lugar de x, y y z esta misma función $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$ obtendremos $m(x, y, z)$, o bien una de las funciones $m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z$. Si tenemos una de las tres últimas funciones, entonces a la función $m(x, y, z)$ la construimos fácilmente. Por ejemplo $m(x, y, m(x, y, z) \oplus x \oplus y) \oplus x \oplus y = m(x, y, z)$. Ahora mostraremos que de la función $m(x, y, z)$ se puede obtener una función que dependa sustancialmente de n ($\geqslant 4$) variables. Si n es impar y $n \geqslant 5$, entonces tenemos que $g_5(\widetilde{x}^5) = m(x_1, x_2, m(x_3, x_4, x_5))$, ..., $g_{2l+1}(\widetilde{x}^{2l+1}) = g_{2l-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2l-2}, m(x_{2l-1}, x_{2l}, x_{2l+1}))$, ... Es fácil demostrar (con inducción por l) que cada una de estas funciones depende sustancialmente de todos sus argumentos. Para un n par, sea $n = 2l \geqslant 4$, la función correspondiente se obtiene, por ejemplo, de la función g_{2l+1} si ponemos $x_{2l-1} = x_2$. En la demostración de la dependencia sustancial de las funciones $g_n(\widetilde{x}^n)$ de todos los argumentos que entran en ellas, es útil tener en cuenta que la mediana $m(x, y, z)$ es igual a 1 sólo en aquellas colecciones que contienen no menos de dos unidades.

2.24. Hay que tomar una colección arbitraria $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y comparar en esta colección el valor de las

partes izquierda y derecha de la relación dada en el enunciado del problema. Es útil hacer diferencia en dos casos: (1) entre los valores de α_1, α_2, y α_3 hay no menos de dos ceros, (2) entre α_1, α_2 y α_3 hay por lo menos dos unidades.

2.25. 1) En la resolución del problema 2.22 se mostró como de $\overline{m(x, y, \overline{z})}$ o de $m(x, \overline{y}, \overline{z})$ se construye la mediana $m(x, y, z)$. Luego, $\overline{m(x, x, x)} = m(x, \overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}$, y por eso (véase el problema 2.23, 1)) de $\overline{m(x, y, z)}$ (o de $m(x, \overline{y}, \overline{z})$) se puede construir la función $x \oplus y \oplus z$. Las funciones autoduales de un lugar ($\overline{x}$ y x) evidentemente se contienen en $[\overline{m(x, y, z)}]$ (y en $[m(x, \overline{y}, \overline{z})]$. Como se deduce del problema 2.12 no existen funciones autoduales que dependan sustancialmente de dos variables. Finalmente, empleando el problema anterior, deducimos que para la construcción de cualquier función autodual de $n \geqslant 3$ variables es suficiente tener todas las funciones autoduales de $n - 1$ variables (y también las funciones $m(x, y, z)$ y $x \oplus y \oplus z$ si $n = 3$). Si $n = 3$, entonces se puede emplear el resultado que fue formulado en el problema 2.14. (OBSERVACIÓN. El problema 2,14 se puede resolver empleando el resultado del problema 2.24 y la función $\overline{x}$, $x \oplus y \oplus z$ y $m(x, y, z)$.) 2) Sea $f(\tilde{x}^n)$ una función autodual arbitraria; y sean todas sus variables sustanciales ($n \geqslant 3$). Mostremos que si $n \geqslant 4$ y $f(\tilde{x}^n)$ no es función lineal (o sea que no es representable en la forma $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, donde $\sigma \in \{0, 1\}$), entonces de $f(\tilde{x}^n)$ mediante la operación de identificación de las variables se puede obtener una función autodual, no lineal, sustancialmente dependiente de tres variables. (Si f es una función lineal autodual, entonces para ella la afirmación análoga es evidente). Así, supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ es una función no lineal sustancialmente dependiente de $n \geqslant 4$ variables. De la no linealidad de la función f se deduce que en el polinomio de Zhegalkin que representa esta función habrá aunque sea un término no lineal. Supongamos, para la determinación, que en este término no lineal entra la variable x_1. Entonces $f = x_1\varphi_1(x_2, \ldots, x_n) \oplus \varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1 \not\equiv$ const. Tomemos la colección $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ en la que φ_1 se vuelve 0. Tomemos $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Veamos dos casos. Primero supondremos que $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$. Como x_1 es una variable sustancial de la función f, pues habrá dos colecciones $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ vecinas por el primer componente y tales que $f(\tilde{\beta}) \neq f(\tilde{\gamma})$. Es evidente que estas dos colecciones son diferentes de las colecciones $\tilde{1}$ y $(0, 1, \ldots, 1)$. Sustituyamos aquellas variables x_i que en las colecciones $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ son ceros por la variable y, y todas las demás variables, excluyendo a x_1, por z. Obtendremos la función $g(x_1, y, z)$ que satisface las relaciones: $g(0, 0, 1) = \sigma$, $g(1, 0, 1) = \overline{\sigma}$ y en virtud de la autodualidad de la función g, $g(1, 1, 0) = \overline{\sigma}$ y $g(0, 1, 0) = \sigma$. Si $g(1, 1, 1) = \sigma$ (y $g(0, 1, 1) = \sigma$), entonces $g(x_1, y, z) = m(\overline{x}_1, y, z) \oplus \sigma$; y si $g(1, 1, 1) = \overline{\sigma} = g(0, 1, 1)$, entonces $g(x_1, y, z) = m(x_1, y, z) \oplus \sigma$. Examinemos ahora el caso cuando no todos los $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son iguales a 1. Además, debido a la autodualidad de la función f, no todos los α_i son iguales a 0. Tomamos las colecciones $\tilde{1}$ y $\tilde{\delta} = (0, 1, \ldots, 1)$. Si $f(\tilde{1}) = f(\tilde{\delta})$ entonces las colecciones mencionadas anteriormente $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ son diferentes de $\tilde{\delta}$ y de $\tilde{1}$, y todo se reduce al primer caso. Si $f(\tilde{1}) \neq f(\tilde{\delta})$, entonces hacemos la identificación de las variables en la función

$f(\widetilde{x}^n)$ partiendo de las colecciones $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Obtenemos cierta función autodual $h(x_1, y, z)$ que satisface las relaciones $h(\widetilde{1}) = \sigma$, $h(0, 1, 1) = \bar{\sigma}$, $h(0, 0, 1) = h(1, 0, 1)$. Si $h(0, 0, 1) = \sigma$, entonces $h(x_1, y, z) = m(x_1, \bar{y}, z) \oplus \bar{\sigma}$. Y si $h(0, 0, 1) = \bar{\sigma}$, entonces $h(x_1, y, z) = m(x_1, y, \bar{z}) \oplus \bar{\sigma}$.

Como de una función lineal mediante la operación de superposición se puede obtener solamente una función lineal, pues cualquier sistema $\mathcal{P}$ completo en S tiene que contener la función autodual no lineal $f(\widetilde{x}^n)$ de la que, como mostramos, se construye la función del tipo $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$, donde α, β y γ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. Si $f(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$, entonces $[f(\widetilde{x}^n)]$ contiene $\overline{m(x, y, z)}$ (véase el problema 2.14) y por eso $[f(\widetilde{x}^n)] = S$ (véase el problema anterior). Supongamos ahora que $f(x, x, \ldots, x) = x$, o sea que f conserva el 0 (y el 1). Entonces en $\mathcal{P}$ tiene que haber una función $f_1(\widetilde{x}^m)$ que no conserve el 0. Si f_1 es una función no lineal, entonces $[f_1] = S$. Si f_1 es una función lineal, entonces $[f, f_1] = S$ y $\{f, f_1\}$ es una base en S (la función f genera sólo funciones que conservan el 0, y la f_1, sólo funciones lineales).

2.26. 1) No se puede, puesto que $f \in S$, y $g \notin S$. 2) Se puede.

2.27. El mayor n es igual a 4.

2.28. Hay dos tales funciones: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus \sigma$, donde $\sigma \in \{0, 1\}$.

2.29. 1) No. 2) Sí. 3) No. 4) Sí.

§ 3

3.2. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ toma valores contrarios en cualesquiera dos colecciones vecinas. Sea $f(\widetilde{0}) = \sigma$, entonces $f(\widetilde{\alpha}) = \bar{\sigma}$, si el número $\|\widetilde{\alpha}\|$ es impar, y $f(\widetilde{\alpha}) = \sigma$, si el número $\|\widetilde{\alpha}\|$ es par. Supongamos que $l_\sigma(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$. Entonces $N_f = N_{l_\sigma}$. Por la unicidad de la representación de las funciones con polinomios, $f = l_\sigma$ y, en consecuencia, $f \in L$. Lo inverso no es cierto. Vease, por ejemplo, $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_3$.

3.6. 2^n. RESOLUCIÓN. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n) = c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n \oplus c_{n+1}$. Puesto que $f \in S$ tenemos $c_1(x_1 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus c_n(x_n \oplus 1) \oplus c_{n+1} \oplus 1 = f(\widetilde{x}^n)$. De aquí que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, o sea que el número de coeficientes c_i, $i = \overline{1, n}$, iguales a la unidad, es impar. En B^n, el número de vectores $(c_1, \ldots, c_n)$ de peso impar es igual a 2^{n-1}. Se puede escoger el coeficiente c_{n+1} arbitrariamente. De esto se deduce la afirmación.

3.10. Si $f(\widetilde{x}^n) \in L$ y $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables entonces $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$ donde $\sigma \in \{0, 1\}$. De esto fácilmente se deduce la necesidad de la afirmación. SUFICIENCIA. Supongamos que $f \notin L$. Entonces existen dos colecciones vecinas $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ tales que $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$ (véase 3.2). Sea i el número de la coordenada en la que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ se diferencian. Entonces $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ ficticiamente depende de x_i.

3.11. Sea $P(\widetilde{x^n})$ un polinomio de grado $k \geqslant 3$. Sin limitación de generalidad se puede considerar que la c.e. $A = x_1 x_2 \ldots x_k$ es un sumando del polinomio P. Suponiendo $x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n$ obtendremos el polinomio Q en el que A es la única c.e. de rango k. Pueden haber varios casos. a) Todas las c.e. de rango $k-1$ sobre el conjunto X^k entran en el polinomio Q. Pongamos $x_{k-1} = x_k$. b) Existen tales i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$, que las c.e. $x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots \ldots x_k$ y $x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k$ faltan (no las hay) en Q. Entonces suponemos $x_i = x_j$. c) El número de sumandos de rango $k-1$ es igual a $k-1$. Supongamos que en Q faltan (no las hay) las c.e. $x_1 \ldots x_{k-1}$. Entonces identificaremos las variables x_1 y x_k. En todos los casos obtendremos un polinomio de grado $k-1$.

3.12. Veamos el polinomio P que realiza la función f. Si el grado del polinomio P es mayor que 2, entonces, mediante la identificación de sus variables, se puede obtener un polinomio Q de grado 2 (véase 3.11). Sin limitación de generalidad se puede considerar que $x_1 x_2$ entra en Q. Identificando todas las variables diferentes de x_1 y x_2 obtenemos una función no lineal de tres variables.

3.13. Del 3.12 se deduce que identificando ciertas variables de la función f se puede obtener una función de tres variables que se realiza con un polinomio de segundo grado. Es necesario sólo mostrar que si en este polinomio hay exactamente dos sumandos de segundo grado, entonces, con la identificación de las variables se puede disminuir en uno este número. Si, por ejemplo, en P entran $x_1 x_2$ y $x_1 x_3$ pero no entra $x_2 x_3$, pondremos $x_1 = x_3$.

3.14. Si $f(\widetilde{x^n}) \notin L$ entonces existen i, j tales que $f(\widetilde{x^n}) = x_i x_j P_1 \oplus x_i P_2 \oplus \oplus x_j P_3 \oplus P_4$, donde P_s es una función no dependiente de x_i y de x_j y $P_1 \not\equiv 0$. Pongamos que $i = 1$, $j = 2$. Que $\widetilde{\alpha} = (\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ la colección de valores de las variables $x_3, \ldots, x_n$ tal que $P_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Entonces $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1 x_2 \oplus l(x_1, x_2)$, donde $l(x_1, x_2)$ es cierta función lineal. La función $\varphi(x_1, x_2)$ se convierte en unidad en un número impar de colecciones. De esto se deduce que la cara $B^{n;\,3,\,\ldots,\,n}_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}$ es la buscada.

3.18. Sea $f \in L$. Si f forma una base en L, entonces $f(\widetilde{0}) \neq 0$ y $f(\widetilde{1}) \neq 1$, en consecuencia, f depende sustancialmente de un número impar de variables. Pero entonces ella es autodual y no puede formar base en L.

3.19. Si Φ es un sistema de funciones completo en L, entonces en Φ existe $f_1 \notin S$, o sea una función sustancialmente dependiente de un número par de variables. Entonces de él se puede obtener una constante. Que esta constante sea σ. En Φ también tiene que estar la función $f_2 \notin T_\sigma$. Colocando la constante σ en el lugar de las variables de la función f_2 obtendremos $\overline{\sigma}$. En Φ también está la función f_3 que depende sustancialmente de más que de una variable. Se puede fácilmente ver que $[0, 1, f_3] = L$. Así, de cualquier sistema completo en L siempre se puede formar un subsistema completo formado de tres funciones De esto se deduce la afirmación.

3.20. Hay tres clases $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$ compuestas sólo por constantes, dos clases $\{x\}$ y $\{x, \overline{x}\}$ formadas de funciones dependientes sustancialmente exactamente de una variable, cuatro clases formadas de funciones de no más de una variable y que contienen constantes y funciones diferentes de constantes: $[0, x]$, $[1, x]$, $[0, 1, x]$, $[0, 1, x, \overline{x}]$. Si una clase de funciones lineales con-

tiene una función que depende sustancialmente de más de una variable, entonces ella contiene una función de un número par de variables, o bien no contiene; contiene una función que no conserva 0, o bien no. De aquí se deduce que las clases $[x \oplus y \oplus z \oplus 1]$, $[x \oplus y \oplus z]$, $[x \oplus y]$, $[x \oplus y \oplus 1]$, L son sólo clases cerradas de funciones lineales que contienen una función que depende sustancialmente de más de una variable.

3.22. INDICACIÓN. Si $f(\widetilde{x}^3)$ satisface la condición y no es autodual, entonces para todo $\widetilde{\alpha} \in B^3$, $f(\widehat{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$, en consecuencia, f se puede dar por completo, dando su valor en las colecciones del tipo $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. De la condición 1), además se deduce que la función f se convierte en unidad exactamente en dos colecciones de este tipo. Así, existen no más de seis funciones no autoduales que satisfacen las condiciones 1) y 2). Es fácil comprobar que todas ellas son lineales.

3.25. Para $n \neq 2$ tales funciones no existen. Todas las funciones del tipo $x_1x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\})$ y sólo ellas satisfacen las condiciones 1) y 2).

3.26. Dos con n impar, 0 con n par. 3.27. De cinco maneras. 3.28. $f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = 1$. 3.29. Con n impar. 3.30. Véase 3.14. 3.31. Véase 3.13. 3.32. xy, $x \vee y$, $x \mid y$, $x \downarrow y$.

3.32. INDICACIÓN. Aunque sea una de las funciones f_1, f_2, f_3 no es lineal.

§ 4

4.2. 2) Con n pares. 4) Con $n \neq 4k-1$, $k = 1, 2, \ldots$

4.3. 1) Con todos los $n \geqslant 2$. 3) Con $n = 3k$, $k = 1, 2, \ldots$ 4.4. De 7 maneras. 4.5. 2) $3 \cdot 2^{2^n-2}$; 5) $3 \cdot 2^{n-1}$; 8) $(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}})/2$; 12) 0; 15) $2^{2^{n-1}-1}$. 4.7. 1). No se puede puesto que $x \oplus y \notin T_1$ y $x \rightarrow y \in T_1$.

4.8. 1) Si $f \notin T_0$ pues su polinomio no contiene 1 en calidad de sumando. Por eso se puede expresar f por xy y $x \oplus y$. La igualdad $T_0 = [x \vee y, x \oplus y]$ se deduce de lo anterior y de que $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

4.9. Sea Φ una base en T_0. Entonces existe $f_1 \in \Phi \setminus T_1$. Identificando todas sus variables obtendremos la constante 0. En Φ existe también la función f_2 que no es monótona. La función f_2 es también, evidentemente, no lineal. Mediante la identificación de las variables y la sustitución de 0 de f_2 se puede obtener la función $\varphi_1(x, y)$ del tipo $xy \oplus \sigma x \oplus \tau y$, $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ (véase 3.13). Como f_2 no es monótona, entonces existen unas colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ tales, que $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ y $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$. Sea A (respectivamente B) el conjunto de las coordenadas de la colección $\widetilde{\alpha}$ $(\widetilde{\beta})$ que son iguales a la unidad. Examinemos la función $\varphi_2(x, y, z)$ que se obtiene de f_2 si se hace en ella $x_i = x$ con $i \in A$; $x_i = y$ con $i \in B$, y $x_i = z$ con $i \notin B$. Tenemos $\varphi_2(0, 0, 0) = \varphi_2(1, 1, 0) = 0$, $\varphi_2(1, 0, 0) = 1$. Si en este caso φ_2 es una función autodual, entonces, o bien $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$, o bien $\varphi_2 = x\overline{y} \vee xz \vee \overline{y}z$. En ambos casos tendremos $[0, \varphi_1, \varphi_2] = T_0$. Si φ_2 no es autodual, entonces examinamos la función $\varphi_3(x, y) = \varphi_2(x, y, 0)$. Tenemos $\varphi_3 = x \oplus y$, o bien $\varphi_3 = x\overline{y}$. Si $\varphi_3 = x \oplus y$, entonces $[\varphi_1, \varphi_2] = T_0$. En el caso de que $\varphi_3 = x\overline{y}$ y $\varphi_1 \neq x \vee y$, todas las funciones obtenidas 0, φ_1, φ_3 pertenecen a una clase cerrada que es precisamente la clase G formada

de todas las funciones f tales que para cualesquiera dos colecciones $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tales, que $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$, existe un i para el cual $\alpha_i = \beta_i = 1$. A causa de la plenitud de Φ en T_0 existe una función f_3 no perteneciente a la clase G. La función f_3 tiene la propiedad de que existen unas colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tales, que $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$ y en $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ no hay coordenadas unitarias comunes. Sea A (B) el conjunto de coordenadas unitarias de la colección $\tilde{\alpha}$ (respectivamente de $\tilde{\beta}$). Sea $\varphi_4(x, y)$ una función que se obtiene de f_3 sustituyendo a x_i por x cuando $i \in A$, con y en lugar de x_i si $i \in B$, a las x_i por 0 cuando $i \notin \notin A \cup B$. Entonces φ_4 es $x \vee y$ o bien $x \oplus y$. En los dos casos tendremos $[x\bar{y}, \varphi_4] = T_0$. Así, de la plenitud del sistema Φ en T_0 se deduce que en él existe un subsistema que contiene no más de tres funciones. Precisamente de esto se deduce la afirmación.

4.10. Análogo al problema anterior. Utilizar el hecho de que en un sistema completo existe una función monótona y una de las funciones f_σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, que no pertenecen respectivamente a las clases G_σ compuestas de todas las funciones f tales, que para cualesquiera dos colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ en las que $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = \sigma$, existe tal i, que las i-ésimas coordenadas de las colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son iguales a σ. Ejemplo de base de una función es el conjunto $\{xy \oplus z \oplus u\}$.

4.11. INDICACION. Examinar la función $xy \oplus y \oplus z$.

4.12. 3) Haremos la demostración de la plenitud del sistema $\Phi = \{xy \vee xz \vee yz, x \oplus y \oplus z\}$ en $T_0 \cap S$ por inducción. Las funciones de $T_0 \cap S$ que dependen de no más que de dos variables, se obtienen mediante la identificación de las variables y de las funciones de Φ. Supongamos que todas las funciones de $T_0 \cap S$ que dependen de menos que de n $(n \geqslant 3)$ variables son superposiciones de las funciones de Φ. Supongamos que $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \cap S$. Entonces $f(x_1, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $f(x_3, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_n)$ dependen de menos de n variables. Ahora utilizamos el resultado del problema 2.24.

4.13. $f(1, 1, 1) = 0$, ya que $f \in T_1$; $f(1, 0, 1) = 0$ puesto que $f \notin M$, $f(1, 0, 1) = f(0, 1, 0) = 0$, puesto que $f \notin S$.

4.14. Si $f \in L$ entonces existe un $k \geqslant 1$ tal, que f es congruente a $x_1 \oplus \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2k+1} \oplus 1$. Si $f \notin L$, entonces mediante la identificación de las variables se puede obtener una función φ del tipo $xy \oplus \sigma(x \oplus y) \oplus 1$, $\sigma \in \{0, 1\}$, o bien $xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1$. En los dos casos $L \cap S \subseteq [\varphi]$.

4.18. Mostremos, por ejemplo, que $T_0 \cap L$ es una clase precompleta en T_0. Supongamos que $f \in T_0 \setminus L$. Identificando las variables de f se puede obtener la función φ, que tiene el tipo $xy \oplus l(x, y)$, o el tipo $xy \oplus xz \oplus yz \oplus l(x, y, z)$, En ambos casos el sistema $\{x \oplus y, \varphi\}$ es completo en T_0, o sea que $[(T_0 \cap L) \cup \cup \{f\}] = T_0$.

4.19. INDICACION. $xy \oplus z \in T_0 \setminus (T_1 \cup L \cup S)$ y $\{1, xy \oplus z\}$ es un sistema completo en P_2.

4.21. $x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$. **4.22.** Indicación. Véase 3.20.

4.23. Demostremos que si $f \notin (T_0 \cap T_1) \cup S$, entonces de ella se puede obtener una constante. Si $f \in T_0 \setminus T_1$ o $f \in T_1 \setminus T_0$, entonces identificando todas las variables en la función f obtendremos una constante. Supongamos que $f \in T_0 \cup T_1$. Puesto que $f \notin S$ entonces f depende sustancialmente de más de una variable y las variables se pueden identificar de tal manera que se ob-

tenga una función sustancia mente dependiente de dos variables, precisamente una de las funciones es $\bar{x}\bar{y}$ o $\bar{x} \vee \bar{y}$. En ambos casos se puede obtener una constante.

§ 5

5.2. 1) $n = 2, 3$. 2) Con n pares. 3) Con n impares.

5.4. Emplear la descomposición de 5.3.

5.5. Dos funciones, de las cuales una tiene variable ficticia.

5.8. 1) No es cierto. Examinar $f(\widetilde{x^3}) = x_3$ y las colecciones (110), (001).

5.12. $\bar{x}$, n funciones.

5.14. Supongamos que la implicante simple I de la función $f(\widetilde{x^n})$ contiene una negación de la variable. Sea, por ejemplo, $I = \bar{x}_1 L$, donde L es cierta c.e. Examinemos $N_L = \{\widetilde{\alpha}: L(\widetilde{\alpha}) = 1\}$ y la colección arbitraria $0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de N_L. A causa de la monotonía de $f(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. De esto se deduce que xL, y, en consecuencia, también L, son implicantes de la función f. Esto contradice el que I es una implicante simple.

5.16. Siempre que $k=4l+2 \left(\frac{k-2}{4} \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{4}\right)$ y para $k=4l+1 \left(\frac{k-1}{4} \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{4}\right)$.

5.18. 1) Existe. 2) No existe. INDICACION. La f.n.d. abreviada $\mathscr{D}$ de la función f tiene una longitud igual a tres. La fórmula $\mathscr{D}^*$ que es dual a $\mathscr{D}$, es la f.n.c. abreviada de la función f^*. La f.n.d. abreviada de la función f se obtiene de $\mathscr{D}^*$ abriendo los paréntesis y aplicando las reglas $AA = A$, $A \vee A = A$, $A \vee AB = A$. Examínense todos los casos en los que la f.n.d. abreviada de la función f^* tiene una longitud igual a tres.

5.19. 1) Todas las unidades inferiores de una función monótona son incomparables de par en par. El número máximo de collecciones incomparables de par en par en B^n es igual a $\binom{n}{[n/2]}$ (véase I.1.15).

5.21. Todas las funciones $f(\widetilde{x^n})$ tales que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ si $\|\widetilde{\alpha}\| > n/2$ y $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ si $\|\widetilde{\alpha}\| < [(n-1)/2]$. Son monótonas.

5.22. 1) 2; 3) $n + 2$; 5) $2^{n+1} - 2n - 2$.

5.23. 1) Supongamos que $f(\widetilde{x^n}) \subset M \cap S$. Examinemos la descomposición $f = \bar{x}_n f_0^n \vee x_n f_1^n$. Como f es autodual, entonces $(f_1^n)^* = f_0^n$. A causa de la monotonía de f tenemos que $f_0^n \in M$, $f_1^n \in M$, $f_0^n \vee f_1^n = f_1^n$. Así que si la función f_1^n de M está dada, pues la función f también estará dada. Sólo queda convencerse de que con $n \geqslant 1$ existe una función $f \in M^{n-1}$ tal, que $f \vee f^* \neq f$. Se puede tomar, por ejemplo, la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$. 3) Supongamos que $f(\widetilde{x^n}) \in M$. Si está dado el componente $f_{10}^{1,2}$ entonces f se determina por monotonía en por lo menos 2^{n-2} colecciones más: si $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ es cierta colección y $f_{10}^{1,2}(1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 0$, entonces $f(0, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 0$; si $f_{10}^{1,2}(1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$, entonces $f(1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. De este modo para dar $f(\widetilde{x^n}) \in M$ es suficiente

dar los componentes $f_{10}^{1,2}$, $f_{01}^{1,2}$ y acabar de determinar la función por monotonía, entonces f quedará indeterminada para no más de 2^{n-2} colecciones.

5.25. $m_c(1) = 1$, $m_c(2) = 2$, $m_c(3) = 12$, $m_c(4) = 126$.

5.26. Tenemos $|M^4| = 186$ (véase 5.24), $|S^4| = 256$. Luego la afirmación se demuestra por inducción teniendo en cuenta que $|S^n| = |S^{n-1}|^2$, $|M^n| < |M^{n-1}|^2$.

5.27. Cuatro.

5.28. Sea $f(\tilde{x}^n) \in M$. Para cada cadena creciente $Z \in B^n$, o bien $f(\tilde{\alpha}) = 0$ para todos los $\tilde{\alpha} \in B^n$, o bien existe una colección $\tilde{\beta} \in Z$ tal, que $f(\tilde{\beta}) = 1$ y $f(\tilde{\alpha}) = 0$ para $\tilde{\alpha} \in Z$, $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$. Sea dada la partición de B^n en $\binom{n}{[n/2]}$ cadenas crecientes. Entonces para representar la función $f(\tilde{x}^n) \in M$ es suficiente indicar para cada cadena de la partición si hay en ella un vértice $\tilde{\alpha}$ tal, que $f(\tilde{\alpha}) = 1$, y si lo hay, entonces dar aquel vértice $\tilde{\beta}$ para el cual $\tilde{f}(\beta) = 1$ y $f(\tilde{\alpha}) = 0$ para todos los $\tilde{\alpha} \in Z$ tales, que $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$. Puesto que la longitud de cada cadena creciente no supera a $n + 1$, no se tienen más de $n + 2$ posibilidades para cada cadena.

5.29. Examinemos la partición del cubo B^n en cadenas crecientes no intersecadas, indicada en el problema I. 1.18. Esta partición tiene las siguientes propiedades. 1) Las cadenas de menor longitud tienen no más de dos vértices. 2) Para cada cara bidimensional que contiene tres vértices de una cadena que tiene $k + 2$ vértices, el cuarto vértice de la cara se contiene en la cadena de partición que tiene k vértices. De la 1) se deduce que en cada cadena de longitud mínima una función monótona puede ser dada con no más de tres procedimientos. De la 2) se deduce que si una función monótona (parcial) está determinada en todas las cadenas que tienen k unidades, entonces en cada cadena de longitud $k + 2$ esta función está determinada por monotonía en todos los sitios menos, puede ser, en dos vértices. En consecuencia hay no más de tres maneras de acabar de determinarla en cada una de tales cadenas. Tomando en cuenta que el número de cadenas es igual a $\binom{n}{[n/2]}$, tendremos que $|M^n| \leqslant 3^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.32. $(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \ldots (x_{2n-1} \vee x_{2n})$.

5.33. Toda función que depende sustancialmente de no más de una variable tiene no más de una unidad inferior.

5.34. INDICACIÓN. Véase la resolución del problema I.1.36, 4).

5.39. 1) No se puede. 2) No se puede. 3) Se puede.

5.40. La afirmación acerca de que cualquier función $f(\tilde{x}^n) \in M$ es representable con ayuda de superposiciones sobre las funciones del conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y\}$, se puede demostrar con inducción por n empleando 5.3. Después la afirmación se deduce de que $\{1, xy, x \vee y\} \subsetneq T_1$, $\{0, xy, x \vee y\} \subsetneq T_0$ y de que del conjunto $\{0, 1, x \vee y\}$ no se puede obtener la función xy y de $\{0, 1, xy\}$ no se obtiene la función $x \vee y$. 5.44. No se puede. 5.45. No se puede.

5.48. Toda base en M contiene constantes y también funciones que dependen sustancialmente de no menos que de dos variables. Por otra parte, sea Φ una base en M que contiene más de cuatro funciones. Entonces, por lo menos tres de ellas dependen de más de una variable. Entre estas funciones se encontrará

la función f_1 que no es conjunción elemental. Entonces mediante la sustitución de las constantes obtendremos $x \vee y$. También está f_2 que no es disyunción elemental, de ella obtenemos xy. Entonces $\{0, 1, f_1, f_2\}$ es un subsistema completo en M.

5.49. Véase 5.48. 5.50. 2) $\{1, xy \vee z\}$. 5.51. Véase 2.24.

5.53. Mostremos, por ejemplo, que $M \cap T_0$ es precompleto. La única función $f \in M \setminus T_0$ es la constante 1. En $M \cap T_0$ se encuentran las funciones $0, xy, x \vee y$ las que junto con 1 forman un sistema completo en M. Sea que existe una clase cerrada Q más, que no se contiene en ninguna de las condiciones enumeradas anteriormente. Entonces existen $f_1 \notin M \cap T_0$, $f_2 \notin M \cap T_1$, $f_3 \in \in \mathscr{D} \cup \{0, 1\}$, $f_4 \notin \mathscr{K} \cup \{0, 1\}$. Entonces $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ de f_3 mediante la sustitución de las constantes y la identificación obtenemos xy, y de f_4 la función $x \vee y$.

§ 6

6.1. Suponer lo inverso y utilizar el criterio de plenitud.

6.2. 4) Es completo. 6) No es completo. 7) Es completo. 8) No es completo.

6.3. Mostrar que $\overline{f} \notin T_0 \cup T_1 \cup L \cup M$.

6.4. 1) Puede ser que no sea completo, por ejemplo, $f_1(\widetilde{x}^3) = m(x_1, x_2, x_3) \oplus x_1 \oplus x_2$, $f_2(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim x_3) \vee x_3$ y que sea completo, por ejemplo, $f_1(\widetilde{x}^3) = \overline{m(x_1, x_2, x_3)}$, $f_2(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee x_2x_3$. 2) Es completo. 3) No es completo.

6.5. Es completo. Muestre que $f_1 \notin T_1 \cup L \cup S \cup M$ y $f_3 \notin T_0$.

6.6. 1) $\{xy \oplus z, (x \oplus y) \sim z\}$, $\{(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y}), (x \oplus y) \sim z, m(x, y, z)\}$. 3) $\{0, (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$, $\{x \oplus y, (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$ $\{(x \to y) \downarrow (y \sim z), (x \mid (xy)) \to \to \overline{z}\}$.

6.7. $\{x \downarrow y\}$, $\{x \mid y\}$, $\{x \oplus yz \oplus z \oplus 1\}$; $\{\overline{x}, xy\}$, $\{\overline{x}, x \vee y\}$, $\{\overline{x}, x \to y\}$; $\{1, x \oplus y, xy\}$, $\{1, x \oplus y, x \vee y\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus yz\}$; $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, xy\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \vee y\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, m(x, y, z)\}$.

6.8. Hay 7 bases de estas: dos de ellas contienen una función cada una, tres contienen dos funciones y además dos bases cada una de ellas, las que contienen tres bases pueden ser seleccionadas del sistema completo $\{xy, x \vee y, x \oplus y, x \sim y\}$;

6.9. 1) — 3) Se puede. 4) No se puede.

6.10. No existe. Supongamos que $f_1 \not\equiv 1$. Entonces $f_1 \notin M$ y $f_1 \notin T_1$ o bien $f_1 \notin S$. En el primer caso se puede «extraer» la función f_2 y en el segundo, la función f_4. En forma análoga se investiga la posibilidad ligada a la relación $f_2 \not\equiv 0$. Supongamos ahora que $f_1 \equiv 1$ y $f_2 \equiv 0$. Si $f_3 \notin M$ entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_3\}$ es completo. Sea $f_3 \in M$; entonces la función f_4 tiene que no pertenecer a la clase M. Si $f_4 \notin L$, entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_4\}$ es completo. Queda examinar el caso cuando $f_4 \in L \setminus M$. Como $f_4 \notin S \cup M$ y $f_4 \in L$, entonces f_4 depende sustancialmente de un número par de variables (y es diferente de las constantes 0 y 1). En consecuencia, o $f_4 \notin T_1$, o bien $f_4 \notin T_0$. Por eso uno de los sistemas $\{f_1, f_3, f_4\}$ o $\{f_2, f_3, f_4\}$ forzosamente será completo.

6.11. 1) P_2. 2) $M \setminus (T_0 \cup L) = \varnothing$. 3) $M \setminus (T_0 \cap T_1) = \{0, 1\}$. 4) $M \cap \cap T_0 \cap T_1$. 5) $T_0 \cap L$. 6) S. 7) $L \cap S$. 8) T_0. 9) $T_0 \cap T_1$.

6.12. 1) $K_1 \subset K_2$. 2) $K_1 \nsupseteq\nsubseteq K_2$. 3) $K_1 \nsupseteq\nsubseteq K_2$. 4) $K_1 \nsupseteq\nsubseteq K_2$. 5] $K_1 = K_2$. 6) $K_1 \nsupseteq\nsubseteq K_2$.

6.13. 2) 56.

6.14. 1) Si $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, entonces $f \not\equiv$ const, $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$. Significa que $f \notin M$. Si fuese $f \in L$, entonces en virtud de la relación $f \notin T_0 \cup T_1$ la función f tendrá que haber dependido sustancialmente de un número impar de variables (y que haber tenido un término libre igual a 1). No obstante, entonces $f \in S$. 2) El número de funciones de Sheffer en el conjunto $P_2(X^n)$ es igual a la diferencia entre el número de todas las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ que satisfacen la condición: $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$, y el número de funciones autoduales que se someten a esa misma condición. Así que en $P_2(X^n)$ se contienen $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ funciones de Sheffer ($n \geqslant 2$).

6.15. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función de Sheffer (aquí $n \geqslant 3$ y todas las variables son sustanciales). Como $f(\widetilde{x}^n) \in S$, entonces habrá dos colecciones contrapuestas $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\widetilde{\alpha}' = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ en las que la función f toma los mismos valores $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}') = \sigma$. Es evidente que $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$ y $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}$ (puesto que $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$). Sustituimos por x aquellas variables x_i a las que en la colección $\widetilde{\alpha}$ les corresponden componentes nulos, y por y las demás variables. Obtenemos la función $g(x, y)$ que satisface las relaciones $g(0, 0) = 1$, $g(1, 1) = 0$, $g(0, 1) = g(1, 0) = \sigma$. Si $\sigma = 0$, entonces $g(x, y) = x \downarrow y$, y si $\sigma = 1$, entonces $g(x, y) = x \mid y$.

6.16. 1) Para $n = 4m + 2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ 2) — 5) Para ninguna n. 6) Para toda $n \geqslant 2$.

6.18. Las funciones que tienen las propiedades indicadas en el enunciado del problema dependen sustancialmente de no menos que de tres variables.

6.21. Véase la resolución do problema 2.25, 2)

6.23. $x\overline{y}$. De ella no se puede obtener, por ejemplo, la función $x \vee y$. En general, en la clase $[x\overline{y}]$ no hay funciones que tomen el valor 1 en la mayoría (más de la mitad) de las colecciones de valores de las variables.

6.24. Una función que satisfazga la exigencia indicada en el enunciado del problema depende sustancialmente de no menos que de cuatro variables. Un ejemplo de tal función puede ser: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4$.

6.25. La demostración se puede hacer por inducción por n. La *base de la inducción*: $n = 4$ (véase el problema 3.12). *Paso de la inducción*. Supongamos que la afirmación es válida para $n = s \geqslant 4$ y la demostremos para $n = s + 1$. Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^{s+1})$ depende sustancialmente de todos sus argumentos y no pertenece a la clase L. Presentaremos la función f en la forma siguiente: $g(\widetilde{x}^s) \oplus x_{s+1}h(\widetilde{x}^s)$. Como x_{s+1} es una variable sustancial de la función f, entonces $h(\widetilde{x}^s) \not\equiv 0$. Examinemos varias posibilidades. (a) En la función g, cierta variable x_i es ficticia, y en la función h, lo es la variable x_j ($i \neq j$). Entonces, es suficiente poner $x_i = x_j$. (b) No hay variables ficticias ni en g ni en h. Si $h \notin L$, aplicamos la suposición inductiva a la función h. Si $h \notin L$ pero $g \in L$

entonces la suposición inductiva se aplica a la función g. Si $\{g, h\} \subset L$, luego $f = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_s)\,\overline{x}_{s+1} \oplus c_1 \oplus c_2 x_{s+1}$, y se puede, por ejemplo, identificar x_s con x_{s+1}. (c) En h no hay variables ficticias y en g las hay. Sea x_i una de ellas. Si $h \notin L$, aplicaremos la suposición inductiva a h. Si $h \in L$, entonces identificaremos x_i con x_{s+1}. (d) Supondremos, por fin, que en g no hay variables ficticias y en h ellas existen. Sea x_1 una de ellas. Si $g \in L$ (lo que quiere decir que $h \not\equiv 1$), entonces identificamos x_1 con la variable de la que h depende sustancialmente (para la determinación, pongamos que esa variable es x_2). Obtendremos $f(x_2, x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_{s+1}) = x_3 \oplus \ldots \oplus x_s \oplus c \oplus x_{s+1} h(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_s)$. Es evidente que esta función no es lineal y que en ella $x_2, \ldots, x_{s+1}$ son variables sustanciales. Examinemos ahora el caso cuando $g \notin L$. Por presupuesto de la inducción, en g habrán dos variables x_i y x_j, que al identificarlas obtendremos de la función g una función no lineal que depende sustancialmente de $s - 1$ variables. Si al identificar x_i y x_j la función h no degenera en un cero idéntico, entonces x_{s+1} se queda como variable sustancial en la función nueva. Supongamos que ahora al identificar x_i con x_j la función h se convierte en un cero idéntico. Entonces las dos variables, x_i y x_j, son sustanciales en h. Para la determinación pongamos que $x_i = x_2$ y $x_j = x_3$. Tenemos $h(\widetilde{x}^s) = x_2 x_3 h_1(x_4, \ldots, x_s) \oplus x_2 h_2(x_4, \ldots$ $\ldots, x_s) \oplus x_3 h_3(x_4, \ldots, x_s)$, y además $h_3 \equiv h_1 \oplus h_2$. Hagamos $x_1 = x_{s+1}$ en la función f. Si con todo esto resulta que la función φ es sustancialmente dependiente de s argumentos, entonces está todo demostrado. (La no linealidad de φ es evidente puesto que $\varphi(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s) = g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s) \notin L$). No obstante, puede ocurrir que con $x_1 = x_{s+1}$, en la función φ alguna variable se haga ficticia. Tal variable solamente puede ser una de las variables x_2 o x_3 (puesto que al identificar en φ las variables x_2 y x_3 tenemos que obtener la función $g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s)$ que depende sustancialmente de $s - 1$ variables). Supongamos que la variable ficticia de la función φ es x_2. Como $f =$ $= x_1(x_2x_3g_1 \oplus x_2g_2 \oplus x_3g_3 \oplus g_4) \oplus x_2x_3g_5 \oplus x_2g_6 \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1} \times$ $\times (x_2x_3h_1 \oplus x_2h_2 \oplus x_3h_3)$, donde cada una de las funciones $g_1, \ldots, g_7, g_8, h_1,$ h_2, h_3 depende de las varibles $x_4, \ldots, x_s$ y $h_3 \equiv h_1 \oplus h_2$, entonces, según la suposición hecha sobre la variable ficticia x_2 en la función φ, tendremos que $\varphi = f(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_1) = x_1(x_3g_3 \oplus g_4) \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_1x_3h_3$, o sea que $g_1 \equiv h_1$, $g_2 \equiv h_2$ y $g_5 \equiv g_6 \equiv 0$. En consecuencia, $f(\widetilde{x}^n) = x_2(x_1 \oplus x_{s+1}) \times$ $\times (x_3h_1 \oplus h_2) \oplus x_1x_3g_3 \oplus x_1g_4 \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1}x_3h_3$. Pongamos que $x_2 =$ $= x_{z+1}$. Obtendremos la función $\psi = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_s, x_2) = (x_1 \oplus 1) \times$ $\times x_2(x_3h_1 \oplus h_2) \oplus x_1x_3g_3 \oplus x_1g_4 \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_2x_3h_3$. Como la función $f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s, x_2) = g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s)$ depende sustancialmente de todos sus argumentos, entonces en la función ψ puede ser ficticia sólo una de las variables x_2 y x_3. Pero eso es posible sólo con $h_1 \equiv 0$ (y ciertas condiciones complementarias). Entonces $h_3 \equiv h_2$ y $f = x_2(x_1 \oplus x_{s+1})\,h_2 \oplus x_1x_3g_3 \oplus$ $\oplus x_1g_4 \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1}x_3h_2$. Como $h \not\equiv 0$, entonces para $h_1 \equiv 0$ la función h_2 no puede «degenerar» en 0, o sea, $h_2 \equiv 0$. Por consiguiente, incluso con $h_1 \equiv 0$ la función $\psi = x_2(x_1 \oplus 1)\,h_2 \oplus x_1x_3g_3 \oplus x_1g_4 \oplus x_3g_7 \oplus g_8 \oplus x_2x_3h_2$ depende sustancialmente de x_2 y de x_3. Así, que si ninguna de las identificaciones $x_2 = x_3$ o $x_1 = x_{s+1}$ no da la función exigida, entonces es suficiente poner $x_2 = x_{s+1}$. Con esto se termina el examen de todas las posibilidades. Está establecida la posibilidad de hacer un paso inductivo.

6.28. 1) — 4) No, no es cierto. En el problema 4) se puede tomar $f(x, y) = x \rightarrow y$.

6.29. Como $|T_0^n| = |T_1^n| = 2^{2^n-1}$, $|L^n| = 2^{n+1} \leqslant 2^{2^n-1}$ (con $n \geqslant 2$) $|S^n| = 2^{2^{n-1}}$ y $|M^n| \leqslant 2^{2^n-2}+2 \leqslant 2^{2^n-1}$ (con $n \geqslant 2$), entonces el conjunto $\mathfrak{A}$ no se contiene por entero en ninguna de las clases T_0, T_1, S, L, M.

6.30. Una función idéntica no está contenida en ninguna base en P_2 (véase el problema 1.18). Cualquiera de las demás funciones del álgebra lógica de un lugar y de cero lugares no pertenece a alguna clase precompleta en P_2. Al mismo tiempo el sistema hereditario de cualquier tal función es un conjunto vacío, lo que quiere decir que se contiene en cada clase precompleta (en P_2). Sea ahora $f(\tilde{x}^n)$ alguna función de cierta base simple $\mathfrak{B}$ y $n \geqslant 2$ (todas las variables son sustanciales). En virtud de la definición de base simple, el sistema $\mathfrak{C} = (\mathfrak{B} \setminus \{f\}) \cup \mathfrak{N}(f)$ no es completo en P_2, o sea que se contiene por entero aunque sea en una clase precompleta K. Si tuviese lugar el que $f \in K$, entonces el sistema $\mathfrak{B}$ $(\subseteq \mathfrak{C} \cup \{f\})$ no sería completo.

6.31. 1) $1, \bar{x}$. 2) $0, 1, xy, x \vee y, x \downarrow y, x|y, m(x, y, z), m(x, y, \bar{z}), m(x, \bar{y}, \bar{z}), m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. 3) $\bar{x}, x \oplus y, x \oplus y \oplus 1, xy, x \vee y, x \rightarrow y, \overline{x \rightarrow y}, x \oplus y \oplus z, m(x, y, z), m(x, y, \bar{z})$. 4) $x \oplus y, x \sim y, xy, x \vee y, x \rightarrow y, \overline{x \rightarrow y}, x \downarrow y, x|y, x \oplus y \oplus z, \overline{x \oplus y \oplus z}, m(x, y, z), m(x, y, \bar{z}), m(x, \bar{y}, \bar{z}), m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Al resolver los problemas 2)—4) es útil emplear los resultados formulados en los problemas 2.14, 2.20 y 3.12.

6.33. 2) Tomando en cuenta los problemas 2.20, 3.12 y 5.38 deducimos que cualquier base simple en P_2 consiste sólo de funciones sustancialmente dependientes de no más que de tres variables. Examinemos primero las funciones que dependen sustancialmente de dos argumentos y no son shefferianas: $x \oplus y$, $x \sim y$, $x \rightarrow y$, $\overline{x \rightarrow y}$, xy, $x \vee y$. Aclararemos cuáles de ellas pueden entrar en una base de cuatro elementos en P_2. Vemos que $x \oplus y \notin T_1 \cup S \cup M$, $x \sim y \notin T_0 \cup S \cup M$, $x \rightarrow y \notin T_0 \cup S \cup L \cup M$ y $\overline{x \rightarrow y} \notin T_1 \cup S \cup L \cup M$. En consecuencia todas estas funciones no sirven para nuestros fines. Supongamos que hay una base simple de cuatro elementos que contiene xy. Como $xy \in (T_0 \cap T_1 \cap M) \setminus (L \cup S)$, entonces las otras tres funciones en la base tienen que ser así: $f_1 \in (T_1 \cap M) \setminus T_0$, $f_2 \in (T_0 \cap M) \setminus T_1$ y $f_3 \in (T_0 \cap T_1) \setminus M$. Es evidente que $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv 0$. Si fuese $f_3 \notin L$, entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_3\}$ sería completo. En consecuencia, $f_3 \in L$, lo que quiere decir que $f_3 = x \oplus y \oplus z$. El caso con la función $x \vee y$ se estudia en forma análoga. Ahora aclararemos qué funciones no lineales, sustancialmente dependientes de tres argumentos, pueden contenerse en una base simple de cuatro elementos. Si $f(x, y, z) \notin L \cup S$, entonces identificando en f las variables se puede obtener una función no autodual que depende sustancialmente de dos argumentos (véase el problema 2.20). Pero entonces $f(x, y, z)$ no puede entrar en una base simple de cuatro elementos (véanse las posibilidades estudiadas anteriormente con funciones dependientes de dos argumentos). Queda por considerar el caso en el que $f(x, y, z) \in S \setminus L$. Si $f \notin T_0 \cap T_1$ y eso quiere decir que $f \in M$, entonces con cualquier función $g \notin S$ el sistema $\{f, g\}$ es completo en P_2. Por eso supondremos que $f \in T_0 \cap T_1$. Si $f \notin M$ entonces (con una exactitud hasta la redenominación de las variables) $f = m(x, y, \bar{z})$; pero si $f \in M$, entonces $f = m(x, y, z)$. En

el primer subcaso $f \in (T_0 \cap T_1 \cap S) \setminus (L \cup M)$, y en consecuencia, en la respectiva base simple de cuatro elementos (si ella existe), las tres funciones restantes tienen que satisfacer las condiciones $f_1 \in (T_1 \cap S) \setminus T_0$, $f_2 \in (T_0 \cap S) \setminus T_1$ y $f_3 \in (T_0 \cap T_1) \setminus S$. Sin embargo, $(T_1 \cap S) \setminus T_0 = (T_0 \cap S) \setminus T_1 = \varnothing$, o sea que no existe ni una función f_1, ni una función f_2 con las propiedades indicadas. Así que el primer subcaso es imposible. En el segundo subcaso $f \in (T_0 \cap T_1 \cap \cap S \cap M) \setminus L$. En consecuencia, las otras tres funciones en la base tienen que ser lineales (pues de otra forma se podría eliminar la función f de la base). Las funciones lineales que dependen sustancialmente de un número par de variables y son diferentes de constantes no pueden pertenecer a una base tal, puesto que cada tal función no se contiene, o bien en el conjunto $T_0 \cup S \cup M$, o bien en el conjunto $T_1 \cup S \cup M$. Una función lineal que depende sustancialmente de un número impar de variables, puede pertenecer a una base así solamente en el caso de que ella conserve el 0 y el 1. Eso quiere decir que eso puede ser solamente la función $x \oplus y \oplus z$. Y quedan además las constantes.

Capítulo III

§ 1

1.3. De $k - 1$ hay que «restar» (mediante la función $x \dot{-} y$) la función $x + 2$ un número determinado de veces.

1.4. Si, y sólo si, α y k son primos entre sí.

1.5. Si $k = 2m \geqslant 4$, entonces se puede tomar $y = m - 1$. Con $k = 2m + 1 \geqslant 3$ examinar la función $1 \dot{-} 2x$.

1.7. Con $k = 4, 6, 8, 9, 10$ el número de diferentes funciones del tipo exigido es respectivamente igual a 3, 2, 5, 3, 4.

1.8. Con $k \neq 3, 4, 6, 12$. Primero comparar los valores de estas funciones con $x = 2$.

1.9. Tenemos: la función $J_{k-1}(x) + \ldots + J_{k-1}(x)$ ($k - 1$ sumandos) es igual a $j_{k-1}(x)$; $j_i(x) = j_{k-1}(x - i - 1)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 2$. Si $g(x) \in P_k^{(1)}$ entonces $g(x) = g(0) \cdot j_0(x) + \ldots + g(i) \cdot j_i(x) + \ldots + g(k-1) \cdot j_{k-1}(x)$ (aquí $l \cdot j_i(x) = j_i(x) + \ldots + j_i(x)$ — l sumandos).

1.14. 2) La función $1 \dot{-} x = j_0(x)$ no es presentable con un polinomio por módulo k, si k es compuesto. 4) $\{\text{máx}(x, y), x + 1\}$ es un sistema completo para cualquier k. En consecuencia, si la función máx (x, y) fuese presentable con un polinomio por módulo k con un k compuesto, entonces el sistema de polinomios sería completo para todos los $k \geqslant 3$.

1.16. 1) Es no representable. 2) Es no representable. 3) Es representable.

1.18. O bien $a_1 = 0$, o bien $a_0 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$.

1.20. 2) No, es injusta. Ejemplo: $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 + 1$, $k = 6$.

1.22. 2) Si $g(x) \in P_4$ y toma su valor solamente del conjunto $\{0, 2\}$, entonces se la puede representar en forma de suma (por mód 4) de las funciones $2j_i(x)$ escogidas de manera correspondiente. Si $g(E_4) \subseteq \{1, 3\}$, entonces la función $h(x) = g(x) + 1$ toma su valor del conjunto $\{0, 2\}$.

1.24. Al hacer la cuenta es útil considerar que $2x^3 = 2x^2 = 2x$ y $3x^3 = 2x + x^3$. Respuesta: 64.

1.26. O bien $b = 0$ y $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, o bien $b = 2$ y $a = 2, 5$, o bien $b = 4$ y $a = 1, 4$.

1.29. 3) a) Si $k = 2m + 1 \geqslant 3$, entonces la función f es autodual solamente con $a = 2m$. Si $k = 2m \geqslant 4$, hay dos posibilidades: $a = 2m - 1$ y $a = m - 1$.

1.30. Si la función $f(\tilde{x}^n)$ de P_k es autodual con relación a la sustitución cíclica $s(x)$, entonces ella se define unívocamente con su subfunción $f(0, x_2, \ldots, x_n)$.

1.31. Todas las colecciones de valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$ se pueden dividir de una manera especial en k^n/r subconjuntos no intersecados. Al hacer esto, en cada uno de los subconjuntos de partición existe una colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ que satisface la condición: cualquiera que sea la colección $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ diferente de la colección $\tilde{\alpha}$ y perteneciente al subconjunto de partición examinado, habrá tal i $(1 \leqslant i \leqslant r - 1)$, que $s^i(\alpha_j) = \beta_j$, $j = \overline{1, n}$. La función $f(\tilde{x}^n)$, autodual con relación a la sustitución $s(x)$, se determina unívocamente con la expresión de f en una colección «seleccionada» $\tilde{\alpha}$ de cada subconjunto de partición.

§ 2

2.2. 3) $2^k - 1$. 4) $m^{m^n} k^{k^n - m^n}$ $(n \geqslant 0,\ 1 \leqslant m = |\mathscr{E}| \leqslant k - 1)$.

2.3. 4) Si D es una partición no trivial del conjunto E_k, entonces $1 < s < k$. En consecuencia, se encontrará tal subconjunto $\mathscr{E}_i$ con no menos de dos elementos, y además cierto subconjunto $\mathscr{E}_j$ distinto de $\mathscr{E}_i$. Sean b_1, b_2 algunos elementos de $\mathscr{E}_i$ y c, cierto elemento de $\mathscr{E}_j$. Entonces la función $g(x)$, que es igual a c para $x = b_1$ e igual a b_1 si $x \neq b_1$, no pertenece a la clase $U(D)$, puesto que $b_1 \sim b_2$ (mód D), c no es equivalente a b_1 (por el mód D) y $g(b_1) = c$, $g(b_2) = b_1$. 4) Sea $(i_1, \ldots, i_n)$ una colección de números del conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$. En total hay s^n colecciones así. Las ordenamos lexicográficamente y las reenumeramos inscribiendo los números del 1 al s^n. La colección $(1, 1, \ldots, 1, 1)$ tendrá el número 1; la colección $(1, 1, \ldots, 1, 2)$, el número 2; la colección $(1, 1, \ldots, 2, 1)$ el número $s + 1$, etc. Si la colección $(i_1, \ldots, i_n)$ tiene el número m, entonces el número $|\mathscr{E}_{i_n}| \cdot \ldots \cdot |\mathscr{E}_{i_n}|$ lo designaremos por d_m. El número de funciones en el conjunto $P_k(X^n)$ que conservan la partición $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ es igual a $\sum_{(j_1, \ldots, j_r)} |\mathscr{E}_{j_1}|^{d_1} |\mathscr{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathscr{E}_{j_r}|^{d_r}$, donde $r = s^n$ y la suma se hace por todas las colecciones posibles de longitud s^n que estén formadas con números pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$.

2.4. 2) Designemos el conjunto $\mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_1$, el $E_k \diagdown \mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_2$, y como en el problema 2.3, 4), d_m indicará el número $|\mathscr{E}_{i_1}| \ldots |\mathscr{E}_{i_n}|$, donde $(i_1, \ldots, i_n)$ es una colección de longitud n formada por números pertenecientes, al conjunto $\{1, 2\}$ y m es el número de la colección en una ordenación lexicográfica. El número de funciones de $P_k(X^n)$ que se contienen en el

conjunto $U(D) \setminus T(\mathscr{C})$ es igual a

$$\sum_{\substack{j_1 \\ (j_2, \ldots, j_r)}} |\mathscr{C}_{j_1}|^{d_1} \cdot |\mathscr{C}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathscr{C}_{j_r}|^{d_r},$$

donde $r = 2^n$, y la suma se toma en las colecciones de longitud 2^n que están formadas por números pertenecientes al conjunto $\{1, 2\}$ y que tienen el primer componente igual a 2. La fórmula indicada es válida para $n \geqslant 1$. Si $n = 0$, entonces en el conjunto $U(D) \setminus T(\mathscr{C})$ entrarán todas aquellas constantes que no se contienen en la clase $T(\mathscr{C})$, o sea que en este caso el número de funciones es igual a $|E_k \setminus \mathscr{C}|$.

2.5. 3) Esos sólo son los predicados de un lugar del tipo $x \neq i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$.

2.6. 3) Emplear el lema básico sobre las funciones sustanciales (véase el lema 7 en [10] en la pág. 46) y mostrar que con $2 \leqslant s \leqslant k-1$ la clase $T(\varnothing, s)$ está formada por todas las funciones sustancialmente dependientes de no más que de una variable y de todas las funciones que toman no más de s valores diferentes.

2.7. 2) $2 \cdot (k-3)!$. 2.10. Examinar, por ejemplo, la función $s(x) = x + j_0(x) - j_1(x)$ con $k = 3$. 2.12. 1) b) $J_1(x) \in M(\rho_2) \setminus M(\rho_1)$. d) $x + j_0(x) + J_1(x) \in M(\rho_1) \setminus M(\rho_2)$. f) $x \dot{-} y \in M(\rho_2) \setminus M(\rho_1)$. 2.13. 1) $T(\{0, k-1\})$. 2) $U(\{0, 1\}, \{2, \ldots, k-1\})$. 5) $T(\{1, 2\})$.

2.14. 2) Con $k \geqslant 4$ se puede examinar la partición $D = \{0, 1\} \cup \{2, \ldots, k-3\} \cup \{k-2, k-1\}$. Con $k = 3$ no se puede encontrar una partición adecuada. 3) Para todo $k \geqslant 3$ es suficiente limitarse a una clase del tipo $M(\rho)$.

2.15. 1) Se puede. 2) Se puede. 5) No se puede; es suficiente examinar el caso en que $k = 3$.

2.17. La demostración se hace análogamente a la de la segunda parte de la afirmación formulada en el problema II.1.13.

2.20. No, no es cierto. Se puede examinar, por ejemplo, la clase $[j_1(x) \cdot j_2(y)]$ en P_3.

2.21. No, no es cierto. Es suficiente tomar en P_3 la clase cerrada engendrada por la función x^2y^2.

2.23. Establecemos alguna correspondencia biunívoca entre todos los números racionales del segmento $[0, 1]$ y el conjunto de las funciones $\{f_2, f_3, \ldots, f_m, \ldots\}$. Tomemos un número real arbitrario $\gamma \in [0, 1]$ y designemos por C_γ el subconjunto de todas aquellas funciones de $\{f_2, f_3, \ldots, f_m, \ldots\}$ que, con la correspondencia indicada anteriormente, responden a todos los números naturales menores que γ. Con $\gamma_1 < \gamma_2$ tenemos $C_{\gamma_1} \subset C_{\gamma_2}$ (¡la inclusión es rigurosa!). Sea $B_\gamma = [C_\gamma]$. Es evidente que $B_{\gamma_1} \subset B_{\gamma_2}$ con $\gamma_1 < \gamma_2$ (la inclusión es rigurosa).

§ 3

3.1. 1) Tal sistema es el conjunto $\{j_0(x), x + y\}$ (véase el problema 1.9 y empléese el criterio de Slupetsky).

3.2. 4) Se puede extraer la función $0, k-1, J_0(x)$ y $J_{k-1}(x)$.

3.5. 3) Sea k un número primo no menor de 3. Como $x^k = x$, entonces $1 + x - x + x^k = 1 + x$. A continuación tenemos $1 + x - (x + 1) + x \times \times (x + 1)(x + 2) \dots (x + k - 1) = 0$, lo que quiere decir que también se puede construir cualquiera de las constantes $1, 2, \dots, k - 1$. Después hacemos $x_2 = x_4 = \dots = x_k = 1$, $x_1 = x$ y $x_3 = y$. Entonces $1 + x - 1 + x \cdot 1 \cdot y \cdot 1 \dots \dots 1 = x + xy = x(y + 1)$. Suponiendo aquí $y = z + k - 1$, obtenemos el producto xz. Queda por construir la suma de dos sumandos. Tomamos $x_1 = k - 1$, $x_2 = x$ y $x_3 = \dots = x_k = 0$. Tenemos $1 + (k - 1) - x + (k - 1) \cdot \cdot x \cdot 0 = -x$. Después, suponemos $x_1 = x + k - 1$, $x_2 = -y$, $x_3 = \dots = x_k = 0$ y obtenemos la suma $1 + (x + k - 1) + y + (x + k - 1)(-y) 0 = x + y$.

3.6. 2) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \text{mín}(x, y)$; $\sim x = (k - 1) \dot{-} x$; $\text{máx}(x, y) = \sim \text{mín}(\sim x, \sim y)$; $(k - 1) + \dots + (k - 1) = 1$ ($k - 1$ sumandos); en consecuencia llegamos a un sistema que a ciencia cierta es completo $\{x + 1, \text{máx}(x, y)\}$. 6) $x \dot{-} x = 0$; $1 \dot{-} 0^2 = 1$; $-1 = k - 1$; $(k - 1) \dot{-} x = \sim x$; $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \text{mín}(x, y)$; $\sim \text{mín}(\sim x, \sim y) = \text{máx}(x, y)$; con ayuda de $k - 1$, 1 y $x \dot{-} y$, obtenemos las constantes $k - 2, k - 3, \dots, 2$; $((((k - 1) \dot{-} x) \dot{-} \dot{-} x) \dot{-} \dots \dot{-} x) = J_{k-1}(x)$ (aquí x se resta $k - 1$ veces); $J_0(x) = J_{k-1} \times \times (\sim x)$; $J_{k-2}(x) = J_0((k - 2) \dot{-} x) \dot{-} J_{k-1}(x)$; $J_{k-3}(x) = J_0((k - 3) \dot{-} \dot{-} x) \dot{-} J_0((k - 2) \dot{-} x)$, etc. Así que se pueden construir todas las funciones del sistema de Rosser—Turquette.

3.7. 3) Es evidente que la función $\varphi(x, y) = \bar{x} j_0(y) + y j_0(x)$ toma todos los k valores de E_k. Tenemos $\varphi(x, x) = j_0(x)$, $j_0(j_0(x)) = 1 - j_0(x)$, $\varphi j_0(x)$, $1 - j_0(x)) = 1 + j_0(x)$, $j_0(1 + j_0(x)) = 0$, $\varphi(0, x) = x + j_0(x)$, $\varphi(x, 0) = x + 1$, $\varphi(j_1(x), x + j_0(x)) = x + j_0(x) - j_1(x)$. Según el teorema de S. Picard el sistema $\{x + j_0(x), x + 1, x + j_0(x) - j_1(x)\}$ es completo en $P_k^{(1)}$. Además hay que emplear el criterio de Slupetsky.

3.8. 1) Con $k = 2m \geqslant 4$ el sistema no es completo. Con $k = 2m + 1 \geqslant 3$ el sistema es completo. 2) El sistema no es completo. 3) El sistema no es completo. 6) El sistema no es completo.

3.9. 1) La plenitud (en S_k) del sistema dado se puede demostrar de la manera siguiente: con inducción por i ($i \geqslant 1$) establecemos que cualquier función g de S_k que satisface la condición: $g(x) \equiv x$ con $x > i$, se genera con las funciones del conjunto $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \dots, h_{0i}(x)\}$. Entonces haciendo $i = k - 1$ obtenemos lo exigido. El paso inductivo se realiza de la siguiente manera. Sea $g(x) \equiv x$, con $x > i + 1$ y $g(i + 1) = j$, $g(l) = i + 1$ (aquí $j \neq i + 1$ y $0 \leqslant l \leqslant i$). Tomamos la función $h(x)$, que coincide con $g(x)$ en todos los puntos excepto en $x = l$ y $x = i + 1$, y con estos dos valores del argumento de la función h es: $h(l) = j$ y $h(i + 1) = i + 1$. Es evidente que la función $h(x)$ ya está construida (por presupuesto de la inducción). No es difícil convencerse de que $g(x) = h(h_{0(i+1)}(h_{0l}(h_{0(i+1)}(x))))$. 2) y 3) Reducir estos sistemas a un sistema del problema anterior.

3.10. Como se deduce del problema 3.9, 1) el sistema dado genera el conjunto S_k. Empleando la función $x + j_0(x)$ no será difícil construir cualquier función que saca exactamente un valor (de E_k). Después de esto, suponiendo que se tienen todas las funciones que sacan no más de i valores ($1 \leqslant i \leqslant k - 2$) hay que mostrar cómo se puede construir una función arbitraria de $P_k^{(1)}$ que saca $i + 1$ valores. Sea $g(x)$ una función arbitraria que saca sólo un valor. Entonces

existen exactamente dos valores del argumento, e_0 y e_1 en los que los valores de la función $g(x)$ son iguales, o sea, que $g(e_0) = g(e_1)$. Los elementos del conjunto $E_k \diagdown \{e_0, e_1\}$ se designan por $e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}$. Tomemos dos funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ del conjunto S_k : $g_1(e_r) = r$, $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $g_2(s) = g(e_s)$, $s = 1, 2, \ldots, k-1$, y $g_2(0) = e \in E_k \diagdown g(E_k)$. Designemos la función $x + j_0(x)$ por $h_0(x)$. Tenemos $g(x) = g_2(h_0(g_1(x)))$. Tomemos ahora la función arbitraria $g'(x)$ que saca $i+1$ valores ($1 \leqslant i \leqslant k-2$). Sea e_0' uno de estos valores. Supongamos que $g'(b_0) = g'(b_1)$. Examinemos la función $f_1(x)$ que coincide con $g'(x)$ en todos los puntos menos en $x = b_0$, y que $f_1(b_0) = e_0'$. Es evidente que la función $f(x)$ ya la tenemos construida (por presupuesto de la inducción). Sean $a_1, \ldots, a_s$ todos los diferentes valores que toma la función $g'(x)$ (aquí $s = k - i - 1 \geqslant 1$), y $E_k \diagdown \{a_1, \ldots, a_s\} = \{e_0', e_1', \ldots, e_i'\}$. Tomemos la función $f_2(x)$ que tiene la siguiente forma:

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq e_0', \\ g'(b_0), & \text{si } x = e_0'. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que la función $f_2(x)$ saca sólo un valor, lo que quiere decir que sabemos construirla. Tenemos $g'(x) = f_2(f_1(x))$.

3.14. 1) $s(x) = \sim x$. 2) $s(x) = \sim x$. 3) $s(x) = x - 1$.

3.15. Esta afirmación contradice a que en P_k el número de clases precompletas no es mayor que 2^{k^k} (véanse los problemas 2.17 y 3.11).

3.16. $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy - x^2 - x - y - 1$ es una función de Sheffer, y $f(x, y) + x \in T(\{1\})$. Para la demostración de que $[f(x, y)] = P_3$ es suficiente construir tres funciones: $x + 1$, $x + j_0(x)$ y $x + j_0(x) - j_1(x)$ y emplear los teoremas de S. Picard y E. Slupetsky. Sea $\varphi(x) = f(x, x)$, entonces $\varphi(\varphi(x)) = x + 1$, $g(x) = f(x, x+1) = x + j_0(x)$, $f(g(x), g(x)) = x^2 - j_1(x)$, $g(x^2 - j_1(x)) \equiv 1$, $f(x, 1) = x + j_0(x) - j_1(x)$.

3.18. Con ninguno de los valores $k \geqslant 3$.

3.22. Este conjunto no es más que numerable. Al mismo tiempo existe un conjunto numerable-infinito $\{K_n\}$ de clases cerradas, cada una de las cuales contiene un número finito de funciones no congruentes de par en par: $K_n = [f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $n = 2, 3, \ldots$, donde $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = j_1(x_1) \times j_2(x_2) j_2(x_3) \ldots j_2(x_n)$.

3.24. Tal clase es, por ejemplo, la clase $K = [f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots]$, donde $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = j_1(x_1) j_2(x_2) j_2(x_3) \ldots j_2(x_n)$.

3.25. 1) $B = \{k-1, j_0(x), x \dot{-} y\}$. Realmente $[B] \supset \{0, 1, \ldots, k-2, k-1\}$, $j_{k-1}(x) = j_0((k-1) \dot{-} x)$, $j_{k-2}(x) = j_0((k-2) \dot{-} x) \dot{-} j_{k-1}(x)$, $j_{k-3}(x) = j_0((k-3) \dot{-} x) \dot{-} j_0((k-2) \dot{-} x)$, ... Continuando, cualquier función $g(x)$ de $P_k^{(1)}$ se puede construir de la forma siguiente. Primero construimos la función $g_0(x) = ((((k-1) \dot{-} j(x)) \dot{-} j_0(x)) \dot{-} \ldots \dot{-} j_0(x))$ donde $j_0(x)$ se resta de $k-1$ un número de veces r_0 tal, que $g_0(0) = g(0)$, o sea, $r_0 = k - 1 - g(0)$. Después, de $g_0(x)$ restamos $r_1 = k - 1 - g(1)$ veces la función $j_1(x)$, etc. En particular se puede construir $\bar{x}$. Para la demostración de la plenitud del sistema B queda recordar que mín $(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$, máx $(x, y) = \sim$ mín $(\sim x, \sim y)$ y que el sistema $\{\bar{x}, \text{máx}(x, y)\}$ es completo en P_k. Continuando, es evidente que no se puede extraer la función $x \dot{-} y$ de B

puesto que entonces se quedarán sólo las funciones que dependen sustancialmente de no más que de una variable). Observaremos además que $\{j_0(x), x \dot{-} y\} \subset T(\{0, 1\})$, y $\{k-1, x \dot{-} y\} \subset T(\{0, k-1\})$. 3) $\{\sim x, \text{mín}(x, y), x+y\}$. Es bueno tener en cuenta que $\{\sim x, \text{mín}(x, y)\} \subset T(\{0, k-1\})$, $\{\sim x, x+y\} \subset L$ y $\text{mín}(x, y), x+y\} \subset T(\{0\})$. 5) $\{j_0(x), x+y^2\}$. Aquí conviene tener en cuenta que $j_0(j_0(x)) + (j_0(x))^2 = 1$, y que $x+y^2$ se puede emplear para la construcción de todas las funciones de un lugar (mediante $j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x)$) casi de la misma manera que se empleó la función $x+y$ en el problema 1.9.

Capítulo IV

§ 1

1.1. Se deduce del cálculo de los pares del tipo (v, x), donde $v \in V$, $x \in X$ v y x son incidentes.

1.2. 2) Ninguno. **1.3.** La inducción por el número de aristas.

1.5. 1) Sea $O(v)$ el conjunto de vértices adyacentes a v y $O'(v) = \{v\} \cup \cup O(v)$. Según la condición: $|O'(v)| \geqslant (n+1)/2$ y $|V \diagdown O'(v)| \leqslant (n-1)/2$. De esto se deduce que cada vértice de $V \diagdown O'(v)$ es contigua a cierto vértice de $O'(v)$, en consecuencia, el grafo es conexo. 2) Con un n par no se puede. Con un n impar se puede.]

1.10. Sean $[v, u]$, $[w, t]$ dos cadenas de longitud máxima, que no tienen vértices comunes en G. El grafo G es conexo. En consecuencia, existe la cadena Z que une, por ejemplo, los vértices v y w. Sea v_1 el último vértice de la cadena $[v, u]$ que se encuentra en el camino de v a w a lo largo de la cadena Z, y w_1 el primer vértice de la cadena $[w, t]$ que se encuentra por este camino después de v_1. El vértice v_1 de la cadena $[v, u]$ la divide en dos partes: $[v, v_1]$ y $[v_1 u]$. Supongamos que la cadena $[v, v_1]$ no sea más corta que $[v_1, u]$. Análogamente el vértice w_1 divide la cadena $[w, t]$ en dos partes. Supongamos que $[w, w_1]$ no sea más corta que $[w_1, t]$. Entonces la cadena $[v, v_1; w_1, w]$ será más larga que cada una de las cadenas $[v, u]$ y $[w, t]$. Es una contradicción.

1.18. INDICACIÓN. Examinar el complemento de los grafos G y H. **1.20**. $2p$. **1.22.** Seis.

1.24. 1) Sean v, u, w tres vértices del mismo grado de cierto grafo G de R_n. Supongamos que v y u son adyacentes y v y w no lo son. Para los vértices u y w es válida aunque sea una de las inclusiones: $O(u) \subseteq O(w)$ o $O(w) \subseteq O(u)$. De esto y de la igualdad $|O(u)| = |O(w)|$ se deduce que $O(u) = O(w)$ y, en consecuencia, $v \in O(w)$. Veamos ahora el par v y w. Según lo demostrado, v y w son adyacentes. Pero la inclusión $O'(v) \subseteq O'(w)$ no tiene lugar, puesto que $u \in O'(v) \diagdown O(w)$. Tampoco es válido que $O'(w) \subset O'(v)$, puesto que $|O'(w)| = |O'(v)|$. Obtenemos una contradicción.

1.26. 1) El número de aristas del grafo G es igual a la suma de los números de aristas de los grafos H_i dividida por $n-1$. 2) Se deduce de 1). **1.28.** Dos.

1.34. 1) Existe. 2) No existe. **1.35.** Es cierto. **1.39.** 2) No es cierto.

2.5. Sea G un grafo plano doblemente conexo con no menos de dos caras internas. Si existe una cara interna separada de la cara externa por una cadena única simple, entonces extrayendo esta cadena se obtiene un grafo biconexo (demostrar esta afirmación). Supóngamos que no existe una cara así. Entonces, toda cara interior que tiene una cadena común con la cara exterior además tiene con ella aunque sea un vértice común que no se encuentra en esa cadena. Mostremos que este caso es imposible. Numeraremos todas las caras interiores. Marcaremos con el índice i los trozos conexos de frontera de las caras exteriores que pertenecen al mismo tiempo a las caras interiores que tienen número i. Entonces habrá tales índices i, j que se encontrarán al rodear las fronteras de las caras exteriores en el orden de i, j, i, j. Designaremos los trozos de frontera respectivos por Γ_{i1}, Γ_{j1}, Γ_{i2}, Γ_{j2}. Seleccionamos en cada uno de los trozos un punto del plano: a_1, b_1, a_2, b_2. Entonces se pueden unir los puntos a_1 y a_2 con una curva, todos los puntos de la cual, excluyendo a_1 y a_2, son puntos interiores de la cara con el número i, y los puntos b_1 y b_2 se pueden unir con una curva, cuya parte interior se encuentra en la cara con el número i. Las curvas se intersecan en cierto punto d que así resulta punto interior de dos caras diferentes. Ha resultado una contradicción.

2.9. Sean G un grafo planar biconexo, y G' su realización plana. Sean además, n, el número de vértices; m, el número de aristas; r, el número de caras del grafo G' (incluyendo también la exterior). En virtud del problema 2.6 tenemos $r = m - n + 2$. El número de pares del tipo (v, x) donde v es el vértice incidente a la arista x, es igual a $2m$. Por otra parte, este número es igual a la suma de los grados de los vértices del grafo. Como cada grado, por el enunciado, es no menor que seis, entonces $2m \geqslant 6n$, o sea, $m \geqslant 3n$. La frontera de cada cara tiene no menos de tres aristas y cada arista pertenece a la frontera de no más de dos caras. De ahí que $3r \leqslant 2m$. No es dijícil convencerse de que el sistema $r = m - n + 2$, $m \geqslant 3n$, $3r \leqslant 2m$ es incompatible.

2.14. Suponemos que el grafo K_5 es planar. Sea K_5' su realización plana. Entonces el número r de caras del grupo K_5' es igual a $r = m - n + 2$, donde m es el número de aristas y n, el número de vértices. En forma análoga al problema 2.9, tenemos $3r \leqslant 2m$. De aquí que $m \leqslant 3n - 6$. Pero $m = 10$ y $n = 5$. Se obtuvo una contradicción. Al demostrar la no planicidad del grafo $K_{3,3}$, observar que cada uno de sus ciclos contiene no menos de cuatro aristas y, suponiendo que $K_{3,3}$ es planar, utilizar 2.11.

2.22. Cada vértice de un grafo sexticonexo tiene un grado no menor de 6 (véase 2.9).

2.27. 3) $\chi(B^n) = 2$, $\chi'(B^n) = n$.

2.28. Dos.

2.45. 1) Sea $\tau(m)$ el número de encubrimientos sin salida de una cadena de longitud m. Entonces $\tau(m) = \tau(m-2) + \tau(m-3)$, $\tau(1) = \tau(2) = \tau(3)$. Véase en el párrafo 3 del capítulo VIII la resolución de relaciones recurrentes de este tipo.

2.49. 1) $\overline{\nu}_k(G)$ es igual al número medio de vértices no contiguos a los vértices del subconjunto $U \subseteq V$ de potencia k. En consecuencia, existe tal

subconjunto U_0, $|U_0| = k$, que $\nu(U_0) \leqslant \bar{\nu}_k(G)$. Si W es el conjunto de vértices no adyacentes a los vértices de U_0, entonces $W \cup U_0$ es el encubrimiento de los vértices de una potencia que no supera a $k + \bar{\nu}_k(G)$. 2) Sea $e(v, u) = 1$, si los vértices v y u no son adyacentes, y $e(v, u) = 0$, si v y u lo son. Sea $S_k(v)$ el número de subconjuntos $U \subseteq V$ compuestos de k vértices, ninguno de los cuales es adyacente a v, y $d(v)$ es el grado del vértice v. Entonces

$$\sum_{U \subseteq V,\ |U|=k} \nu(U) = \sum_{U \subseteq V,\ |V|=k} \sum_{v \in V} e(v, u) =$$

$$= \sum_{v \in V} S_k(v) = \sum_{v \in V} \binom{n-d(v)}{k} \leqslant |V| \binom{n-d_0}{k},$$

de lo que

$$\bar{\nu}_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{|V|-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V|-i}\right).$$

§ 3

3.2. Se puede hacer la demostración con inducción por el número de vértices del orgrafo. En el paso inductivo será útil extraer del orgrafo uno de los vértices: v_1 o v_2.

3.5. Emplear la inducción por el número k.

3.8. La afirmación se puede demostrar con inducción por el número de vértices en el torneo.

3.10. La desigualdad es evidente con $n = 1$. Sea válida para tales n, que $1 \leqslant n \leqslant m$. Examinemos el torneo T con $m + 1$ vértices. Como en todo torneo con $m + 1$ vértices hay exactamente C^2_{m+1} arcos, entonces se podrá encontrar un vértice v_0 con un semigrado de salida $\geqslant [(m + 1)/2]$. Extrayendo de T el vértice v_0 obtenemos el torneo T' que tiene m vértices y contiene el conjunto S formado de no menos que de $f(m)$ arcos concordados. Los arcos que salen de v_0 y los arcos que pertenecen a S están concordados. Aprovechando la suposición inductiva, tenemos

$$f(m+1) \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{m+1}{2}\right]\left[\frac{m+2}{2}\right].$$

3.12. Cualquier grupo de orden par contiene aunque sea un elemento inverso a sí mismo y diferente del elemento unitario del grupo. Si el grupo del torneo T fuese par, entonces en él se podría encontrar un elemento α que satisfaciese la propiedad indicada anteriormente. Como α no es elemento unitario, entonces existen dos vértices v_1 y v_2 tales que $\alpha(v_1) = v_2$ y $\alpha(v_2) = v_1$. Supongamos que T contiene el arco (v_1, v_2). Entonces el arco $(\alpha(v_1), \alpha(v_2))$ también tendría que pertenecer a T. Hemos obtenido una contradicción.

3.15. La demostración se puede hacer con inducción por el número de componentes fuertes del torneo. Si en la condensación hay bien sólo un vértice, o bien dos vértices, entonces, ella es un orgrafo transitivo, por definición.

3.19. Emplear la inducción por el número de vértices en el orgrafo. En el paso inductivo hay que extraer uno de los vértices con semigrado nulo de salida, estableciendo de antemano la existencia de tal vértice en el orgrafo dado.

3.21. La demostración se puede realizar con inducción por el número de vértices del orgrafo.

3.25. Emplear la inducción por la longitud del contorno.

3.29. La demostración se puede hacer con inducción por el orden del determinante.

§ 4

4.2. Partiendo de un vértice arbitrario del árbol, construiremos una cadena añadiéndole en cada paso un vértice nuevo hasta que eso sea posible. En el momento cuando ya no se puede hacer eso, los vértices finales de la cadena resultarán vértices colgantes del árbol. El proceso de construcción de la cadena se interrumpe a causa de que el conjunto de los vértices es finito y de la falta de ciclos en el árbol.

4.4. 1) Según el problema 1.26 por el sistema $F(G)$ se puede restablecer el número de aristas del grafo G y su conexidad.

4.9. Se puede hacer la inducción por la dimensión del radio del árbol.

4.12. La potencia es continual. **4.14.** 2. **4.23.** Hacer la demostración con inducción por la longitud del vector. **4.28.** Es cierto. **4.30.** Es cierto. **4.31.** Hablando en general, no es cierto. **4.32.** Hablando en general, no es cierto. **4.33.** $n-1$.

4.34. Una red no descomponible no tiene aristas paralelas y no es p-descomponible. De aquí que $m \leqslant \binom{n}{2} - 1$. En una red no descomponible cada vértice interior tiene un grado no inferior a 3, y los polos, un grado no inferior a 2, con $n > 2$.

4.40. 1) a), b), c). Se puede. 3) a), b). No se puede. **4.43.** Examinar Γ_m^p, $m > 3$. **4.52.** No es cierto.

§ 5

5.2. 1) $2^{\binom{n}{2}}$. 2) $\binom{n^2}{m}$. **5.3.** 2) Emplear la fórmula «de inclusiones y exclusiones». **5.5.** 1) Emplear el que en un grafo conexo, $m \leqslant \binom{n}{2}$ y $m \geqslant n-1$. 2) En un grafo conexo con m aristas hay no más de $m+1$ vértices. El número de pares de vértices no iguales es no más de $\binom{m+1}{2}$. De aquí que $\psi(m) \leqslant \binom{\binom{m+1}{2}}{m}$. A continuación se emplea la fórmula de Stirling.

5.6. Observar que el número de vértices en el grafo no es mayor que $2m$. Luego es análogo al problema 5.5, 2).

5.7. Véanse 5.5, 2) y 5.6.

5.9. 1) El código de un árbol con m aristas es un vector binario de longitud $2m$ con m coordenadas unitarias. 2) Véase 4.24.

5.10. Emplear 5.4 y la fórmula de Stirling. 5.14. Véanse VIII. 3.18 y VIII.3.19.

5.16. La red $\Gamma(a, b)$ que tiene las propiedades I y II es el resultado de la sustitución de las aristas de la red Γ_k^p, $k = \overline{1, m+1}$ en lugar de las redes del tipo $\Gamma_{n-1}^s(a, b)$. El número de estas redes es igual al número de arreglos de m objetos en $n - 1$ cajones de tal manera que ninguno de los cajones en ningún arreglo se encuentre vacío, y es igual a $\binom{m-1}{n-1}$.

5.17. 2) Utilizar el problema 5.14.

5.19. Si el grafo no es conexo, entonces se puede dividir el conjunto de sus vértices en dos fracciones tales, que no existen aristas que unen vértices de diferentes partes. Una de las fracciones tiene un número de vértices que se comprende entre los límites de 1 y $[n/2]$. Un grafo con los vértices numerados se define por completo con la elección de las aristas. El número de aristas que no se permite elegir es igual a $k(n-k)$, donde k es el número de vértices en una de las partes.

5.22. Todo subgrafo del cubo B^n se determina por completo dando un conjunto de vértices. El conjunto de vértices de un subgrafo conexo se determina dando su soporte (un árbol que contiene todos los vértices). Para presentar un árbol que sea subgrafo del cubo B^n se puede elegir algún vértice del cubo, perteneciente a un árbol (hay no más de 2^n maneras). Para dar un árbol con k vértices no hay más de 4^{k-1} procedimientos. Para cada arista del árbol se puede indicar su dirección como arista del cubo B^n de no más que de n maneras. De esto se deduce la evaluación

5.26. $\binom{n}{3}\dfrac{\binom{\binom{n}{2}-3}{m-3}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$. 5.29. $\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}$.

5.31. Sea $\delta(n)$ la parte de aquellos grafos que tienen $p(G) \geqslant 1$. En virtud de la desigualdad (1) tenemos que $\delta(n) \leqslant \overline{p}(n) \to 0$ con $n \to \infty$. De esto se deduce el resultado.

5.32. 2) $Z(\Gamma(K_{2,3}), t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \dfrac{1}{2!\,3!}(t_1^2 + t_2)(t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3)$.

5.33. 1) Tomemos una permutación arbitraria $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y coloquemos en ella paréntesis de tal manera que resulte una sustitución con estructura cíclica $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$; en este caso primero se dispondrán j_1 ciclos de longitud 1, después j_2 ciclos de longitud 2, etc. (o sea que la sustitución tendrá la forma siguiente: $(a_1)(a_2)\ldots(a_{j_1}) \times \times (a_{j_1+1}a_{j_1+2})\ldots$). Supongamos ahora que de dos permutaciones diferentes de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se han construido de la manera indicada anteriormente dos sustituciones π_1 y π_2 con una estructura cíclica (j).

Se plantea la pregunta: ¿cuándo π_1 coincidirá con π_2? La coincidencia puede tener lugar por dos causas: (1) en las sustituciones π_1 y π_2 hay ciclos iguales que se encuentran en diferentes lugares; (2) ciclos, que aunque son iguales (como los ciclos de sustitución) pero con la construcción indicada anteriormente ellos comienzan con diferentes elementos (por ejemplo (123) y (231)). La primer causa lleva la repetición de la misma sustitución $\prod_{k=1}^{n} j_k!$ veces, y la segunda, a la repetición $\prod_{k=1}^{n} k^{j_k}$ veces; además, estas causas actúan independientemente uno del otro. 4) La demostración se puede hacer con inducción por n, empleando las relaciones de los puntos 1) y 2) de este problema.

5.34. Es útil emplear el siguiente hecho evidente: el ciclo es una sustitución par si, y sólo si, su longitud es impar.

5.36. Se deduce del teorema enumeracionable de Polya.

5.37. Interpretar de una manera adecuada los coeficientes del binomio $1 + x$ y emplear el teorema enumeracionable de Polya.

5.40. A cada grafo cotejarle una colección de grafos conexos, que sea colección de todos sus componentes de conexión. Después emplear el teorema enumeracionable de Polya.

5.42. Todo torneo se define unívocamente con su condensación (con los vértices numerados) y colección de componentes fuertes. La numeración de los vértices hace falta solamente para cotejarlos con los respectivos componentes fuertes del torneo.

§ 6

6.3. Catorce. 6.4. Véase 6.2. 6.6. Se deduce de que cualquier función $f(\tilde{x}^n)$ tiene una f.n.d. de complejidad no mayor que $n2^{n-1}$. 6.16. Véase 6.15.

6.20. Se deduce de que la complejidad del esquema dual al dado, es igual a la complejidad del esquema incial, y de 6.18.

6.21. Si un esquema contiene no más de siete contactos, se lo puede dibujar en un plano de tal manera, que sigue siendo plano después de añadir una arista entre los polos. En consecuencia, existe un esquema dual a él. La sustitución en los últimos dos contactos del tipo x^{σ} por $x^{\bar{\sigma}}$ lleva a un esquema que efectúa la negación de la función que se realiza en el esquema inicial.

6.22. Escojamos un contacto arbitrario de un esquema sin repetición y que realiza la función booleana f, y examinemos la cadena que pasa por este contacto. Los valores de las variables, diferentes de aquellas que entran en la cadena elegida, se pueden fijar de tal manera, que todos los contactos que no entran en la cadena resultarán desconectados. El esquema obtenido realiza la c.e. dependiente de la variable elegida. De este modo, resulta que cierto componente de la función f, y en consecuencia la propia función f, depende sustancialmente de la variable elegida.

6.25. El esquema Σ representado en la fig. 21 tiene entre sus secciones los conjuntos $\{x, y\}$, $\{r, w\}$, $\{x, r, v, z\}$ y $\{x, w, t, u\}$. Entonces, si existe un esquema

irrepetible Σ_1 que realiza la función f^*, pues en él habrá cadenas con las conductibilidades xy, rw, $xrvz$, $xwtu$. Sin limitación de generalidad, se puede considerar que el contacto x confluye al polo a de la red Σ_1. Entonces a este polo también confluye el contacto r, o bien el contacto w. En el primer caso, en Σ_1 no existe la red $xrvz$, y en el segundo, la red $xwtu$.

6.26. No es cierto. Utilizar el que $\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ y el resultado del problema 6.25.

Capítulo V

§ 1

1.1. Sea $\rho(v, w) \leqslant 2t$ para ciertos v y w de C. Entonces $S_t^n(v) \cap S_t^n(w) \neq \neq \varnothing$. En consecuencia, cualquier transformación ψ: $B^n \to C$ tal, que $S_t^n(u) \subseteq \subseteq \psi^{-1}(u)$ para todo $u \in C$ no es unívoca.

1.2. 1) Hablando en general: no es cierto. 2) Es cierto. 3) Hablando en general, no es cierto.

1.3. Los conjuntos $C_0 = \{\widetilde{\alpha} \in C, \ \|\alpha\| \text{ es par}\}$ y $C_1 = \{\widetilde{\alpha} \in C, \ \|\widetilde{\alpha}\| \text{ es impar}\}$, son códigos que descubren un error. Aunque sea uno de ellos contiene no menos de la mitad de palabras de C.

1.4. 1] Descubre uno y corrige 0 errores. 2) Descubre $n - 1$ y corrige $[(n-1)/2]$ errores.

1.7. 2) 16. 1.8. 2^{n-1}. 1.9. 2. 1.12. No existe.

1.13. Supongamos que para cierto $n > 7$ existe un $(n, 3)$-código densamente empaquetado. Entonces, según el 1.11, para esta n el número $\sum_{i=0}^{3}\binom{n}{i}$ es el exponente del dos. En consecuencia, para cierta k se cumple la igualdad $(n+1)(n^2 - n - 6) = 3 \cdot 2^k$. Entonces, o bien $n + 1$ es el exponente del dos, o bien $n + 1$ tiene la forma $3 \cdot 2^r$ para cierto r natural. Si $n + 1 = 2^r$, entonces $n^2 - n + 6 = 3 \cdot 2^{k-r}$. Sustituyendo en la última igualdad $n = 2^r - 1$, tenemos $2^{2r-3} - 3 \cdot 2^{r-3} + 1 = 3 \cdot 2^{k-r-3}$. Para $r > 3$, el primer miembro es un número impar mayor que 3 y en el segundo habrá, o bien un número par, o bien 3. El segundo caso se examina de manera análoga.

1.14. Supongamos que los vértices $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ forman un (n, d)-código. Sin limitación de generalidad, $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$ y $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = d$. Pongamos que $A_{\sigma\tau} = \{i : \beta_i = \sigma, \ \gamma_i = \tau\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$. Examinemos el vértice $\widetilde{\delta}$ tal que $\delta_i = 0$ con $i \in A_{11}$ y $\delta_i = 1$ con $i \notin A_{11}$. Tenemos $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}) = \|\widetilde{\delta}\| = |A_{01} \cup A_{10} \cup A_{00}| \geqslant |A_{01} \cup A_{10}| = \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant d$, $\rho(\widetilde{\delta}, \widetilde{\beta}) \geqslant \geqslant \|\widetilde{\gamma}\| \geqslant d$, $\rho(\widetilde{\delta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant \|\widetilde{\beta}\| = d$.

1.16. Sin limitación de generalidad consideramos que $\widetilde{0} \in C$. Para cada $\widetilde{\alpha} \in B_{d+1}^n$ existe, y además es único, un vértice $\widetilde{\gamma} \in C$ tal, que $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant d$. Como el peso de cualquier palabra de código no nula es no menor que $2d+1$, entonces $\widetilde{\gamma} \in B_{2d+1}^n$. Sea $A(\widetilde{\gamma}) = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B_{d+1}^n, \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = d\}$. Entonces,

$\bigcup_{\tilde{\gamma} \in C \cap B^n_{2d+1}} A(\tilde{\gamma}) = B^n_{d+1}$ y para cualesquiera $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ de $C \cap B^n_{2d+1}$, tenemos $A(\tilde{\gamma}_1) \cap A(\tilde{\gamma}_2) = \varnothing$.

1.17. La distancia de código de cualquier código equidistante que tiene una potencia mayor que 2, es par.

1.20. 1) En cada una de las caras $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{0\,\ldots\,0}$ y $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{1\,\ldots\,1}$ construimos los códigos C_0 y C_1 de potencia $m(n, d)$. Entonces $C_0 \cup C_1$ es el $(n+d, d)$-código de potencia $2m(n, d)$. 3) INDICACIÓN. Si C es un (n, d)-código en B^n, entonces para cada cara $(n-1)$-dimensional g, el conjunto $C \cap g$ es un $(n-1, d)$-código.

1.23. Sean $n < 2d$, y C un (n, d)-código arbitrario de potencia $m \geqslant 2$. Compongamos la matriz M, cuyas filas son palabras en código. Sea R la suma de distancias de par en par entre los pares (no ordenados) de palabras en código. Por una parte $R \geqslant \binom{m}{2} d$. Por otra parte $R = \sum_{i=1}^{n} h_i (m - h_i)$, donde h_i es el número de unidades en la i-ésima columna de la matriz M. Como $h(m-h) \leqslant \frac{m^2}{4}$, entonces $\frac{m(m-1)}{2} d \leqslant n \frac{m^2}{4}$. De aquí que $m \leqslant \leqslant \frac{2d}{2d-n}$.

1.25. 3) Sea C un (n, k, d)-código máximo. Entonces, el conjunto $C_i = \{\tilde{\alpha}\colon \tilde{\alpha} \in C,\ \alpha_i = 0\}$ es un $(n-1, k, d)$-código. El número de pares de tipo $(i, \tilde{\beta})$, tales que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\tilde{\beta} \in C_i$ no supera $n \max_i |C_i| \leqslant n \cdot m(n-1, k, d)$. Por otra parte, cada vector $\tilde{\alpha} \in C$ genera $n-k$ tales pares. De aquí que

$$(n-k)\, m(n, k, d) \leqslant nm(n-1, k, d).$$

1.26. Supongamos que $\tilde{\alpha} \in B^n$, $C \subseteq B^n$ y $C_{\tilde{\alpha}} = \{\tilde{\gamma}\colon \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta},\ \tilde{\beta} \in C\}$. Entonces, si C es un (n, d)-código y $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$, entonces $C_{\tilde{\alpha}} \cap C_{\tilde{\beta}} = \varnothing$. Efectivamente, supongamos que $\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\delta} \in C_{\tilde{\beta}}$ y $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta} \oplus \tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \oplus \tilde{\alpha}$. Entonces, $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = \rho(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}', \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}') = \| \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}' \| = \| (\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}) \oplus \oplus (\tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}') \| \neq 0$, puesto que en el caso contrario $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}'$ y, en consecuencia, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}')$. Pero $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$ y $\rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}') \geqslant d$, puesto que $\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}' \in C$. De esto se deduce la afirmación.

1.27. Se deduce de 1.26, teniendo en cuenta que en cualquier cara $(d-1)$-dimensional del cubo B^n las distancias de par en par entre los vértices no supera $d-1$ y el número de vértices es igual a 2^{d-1}.

§ 2

2.2. Un sistema linealmente independiente es, por ejemplo, B^n_1. Si s vectores de B^n son linealmente independientes, entonces todas sus combinaciones del tipo (1) representan en sí vectores diferentes de par en par. Si se encontrase

un subconjunto formado de $n + 1$ vectores linealmente independientes, entonces se realizaría la igualdad $|B^n| = 2^{n+1}$.

2.4. Se deduce de que el (n, k)-código es un subespacio B^n k-dimensional, o sea que en él el número máximo de vectores linealmente independientes es igual a k y toda combinación lineal de vectores de código pertenece al código.

2.5. Si en el código existe un vector de peso impar, entonces, la mitad de palabras de código tiene un peso impar y la otra mitad, par. En el caso contrario, todos los vectores tienen peso par. La primera afirmación se deduce de que el número de combinaciones lineales, en las que entra el vector dado de peso impar, es igual al número de las combinaciones en las que él falta. Todas las combinaciones se dividen en pares en los que exactamente uno tiene peso impar.

2.6. Un vector no nulo en B^n se puede elegir de $2^n - 1$ maneras. Si se eligen i vectores linealmente independientes, entonces el subespacio correspondiente tiene 2^i vectores. Todo vector del complemento a este subespacio forma, con los i vectores elegidos, un conjunto lineal independiente y todo vector del subespacio se expresa con una combinación lineal de los vectores escogidos. De este modo, el $(i + 1)$-ésimo vector se puede elegir de $2^n - 2^i$ maneras.

2.7. Véase 2.6. 2.8. 2^{n-1}. 2.10. Es cierto.

2.11. 1) $m(C(H)) = 8$, $d(C(H)) = 2$; 5) $m(C(H)) = 32$, $d(C(H)) = 7$.

2.14. La matriz generadora $M(C)$ del (n, k)-código C se puede reducir al tipo $(I_k P)$ mediante la sustitución de filas por sus combinaciones lineales y la permutación de columnas. Si el vector $\tilde{\alpha}$ es ortogonal a cada fila de la matriz $M(C)$, entonces el vector $\tilde{\beta}$, obtenido de $\tilde{\alpha}$ mediante la permutación correspondiente de las coordenadas, es ortogonal a cada fila de la matriz $M(C)$, y viceversa. Una de las matrices generatrices del código C^*, dual al código C, engendrado por la matriz $(I_k P)$ tiene la forma $(P^T I_{n-k})$, o sea, que C^* es $(n, n-k)$-código. De esto se deduce que también el código C^* es dual al C y es un $(n, n-k)$-código.

2.15. Análoga a 2.5.

2.16. Es evidente que la distancia d de código no es menor que el peso mínimo de un vector de código. Si $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$ para ciertas palabras de código $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, entonces, como $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$, también es un vector de código y $\rho(\tilde{0}, \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}) < d$; se llega a una contradicción con el enunciado del problema

2.17. Se deduce del 2.15 y del 2.16.

2.18. El número de unidades en la matriz del código C es igual a $\frac{1}{2}|C|n$; por otra parte, este número es no menor que $d(|C| - 1)$.

2.20. Sea $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ el vector del peso d, ortogonal a la matriz H. Designemos la i-ésima columna de la matriz H por h_i. De la ortogonalidad de $\tilde{\alpha}$ a cada fila de la matriz H, se deduce que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \tilde{0}$. De esto se deduce la relación de dependencia lineal entre aquellas columnas h_i que entran en combinación lineal. En consecuencia, a cada $\tilde{\alpha}$ de peso d del espacio nulo de la matriz H le corresponde la reunión d de columnas linealmente dependientes de esta matriz. De este modo, si cada $d - 1$ columnas de la matriz H son linealmente

dependientes, entonces el peso mínimo del vector de código será no menor que d, y viceversa, si existe un conjunto de $d-1$ filas linealmente dependientes, pues existe un vector de peso menor que d en el subespacio ortogonal.

2.21. Consecuencia de 2.20.

2.24. 1) De 2.18 se deduce que $g(9, 5) \leqslant 10$. No es difícil construir un $\langle 9, 5 \rangle$-código lineal de potencia 4. De aquí que $g(9,5) \in \{4, 8\}$. Supongamos que C es un $\langle 9, 5 \rangle$-código lineal de potencia 8. Entonces cuatro vectores de código tienen peso impar. Ningunos dos de estos cuatro se encuentran fuera de B_5^9. Pero entre tres vectores de B_5^9 siempre existen dos con una distancia no mayor que 4 entre los mismos.

§ 3

3.4. Examinar el código $\{a, aabb, bb\}$.

3.8. Véase el 3.7.

3.10. El número de palabras de longitud menor que l, en un alfabeto de k letras, es igual a $\sum_{i=0}^{l-1} k^i = \frac{k^l-1}{k-1}$. De aquí que si $k^l - 1 < m(k-1)$, en M existe una palabra de longitud no menor que $\log_k(1+m(k-1))$.

3.11. 1) Hacer la demostración con inducción por n. 2) Para todo código divisible existe un código prefijo con la misma colección de longitudes de las palabras de código (véase [10], parte 5).

3.18. 1) Hacer la demostración con inducción por m.

3.19. Se deduce de 3.18.

3.22. 1) Sea $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un código binario prefijo y la longitud máxima de la palabra código, igual a n. Sea $w = \alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda(w)}$ una palabra de C. Sea $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ un vector en el que $\gamma_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, \lambda(w)}$ y en las demás coordenadas haya tachaduras. Entonces el vector $\widetilde{\gamma}$ es un código $(n - \lambda(w))$-dimensional de la cara del cubo B. De la prefijación del código se deduce que las caras que corresponden a diferentes palabras de código no se intersecan. De aquí que $\sum_{j=1}^{m} 2^{n-\lambda(w_j)} \leqslant 2^n$. 2) De la plenitud del código se deduce que para cada $\widetilde{\alpha} \in B^n$ existe una palabra de código w, que es un prefijo de $\widetilde{\alpha}$. Eso quiere decir que la colección $\widetilde{\alpha}$ se contiene en la cara correspondiente a la palabra w. De la prefijación del código se deduce que las caras que corresponden a diferentes palabras de código no se intersecan. Así que la totalidad de caras, que corresponden a las palabras de un código prefijo completo, da la partición del cubo B^n en caras que no se intersecan. De esto se deduce una igualdad. 3) La demostración es análoga a 1.1.34.

3.23. 1) Es cierto. La afirmación se deduce de que todo código óptimo es código prefijo completo.

3.24. Inducción por m.

3.25. Un código prefijo con una longitud de las palabras de código $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ existe si, y sólo si, $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ (véase el 3.22). De aquí que $L_m = \min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, donde el mínimo se toma en todos los conjuntos $\{\lambda_1, \ldots$

..., $\lambda_m\}$ de números naturales que satisfacen la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$. El mínimo de $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ se alcanza en tales conjuntos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ que $|\lambda_i - \lambda_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Efectivamente, si existen tales λ_i, λ_j que $\lambda_i - \lambda_j \geqslant 2$ entonces después de la sustitución de λ_i por $\lambda_i - 1$, y de λ_j por $\lambda_j + 1$, la magnitud $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ no cambia, y la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ se sigue cumpliendo. Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ un conjunto de números tal, que $\lambda_i = \lambda$ con $i = \overline{1, m-r}$, $\lambda_i = \lambda + 1$ con $m - r < i \leqslant m$, λ es un número entero. Entonces, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = m\lambda + r$, y la condición toma la forma $m2^{-\lambda} - r2^{-\lambda-1} \leqslant 1$. De la condición se deduce que $\lambda > (\log_2 m) - 1$ y, en consecuencia, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \geqslant m\,[\log_2 m]$.

3.27. 1) Para $m = 3$, suponiendo $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 > 0$, tenemos $L(P) = p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 1 + p_2 + p_3 > 1$. Luego la afirmación se deduce de que con la operación de ampliación el coste del código no disminuye. 2) Para los $\varepsilon > 0$ y $m \geqslant 2$ dados véase la distribución $\mathbf{P} = \left(1 - \delta, \frac{\delta}{m-1}, \ldots, \frac{\delta}{m-1}\right)$, donde $\delta = \frac{\varepsilon}{]\log_2 m[}$.

Capítulo VI

§ 1

1.1. 1) No lo es, puesto que la señal de salida en el momento de tiempo t depende de la señal de entrada en el momento siguiente. 3) Sí, lo es.

1.2. 3) No lo es. 4) Lo es.

1.3. 2) Lo es. 3) Lo es. 5) Lo es: la salida en el momento de tiempo t es igual a la negación de la entrada en este mismo momento.

1.4. 2) No lo es. 4) No lo es.

1.5. 1) No se puede determinar hasta una función determinada. 2) La función φ admite continuar la determinación hasta una función determinada. 3) Es posible continuar la determinación.

1.6. Es suficiente examinar la función

$$\varphi(X_1, X_2) = \begin{cases} \widetilde{1}^w, & \text{si } X_2 = \widetilde{0}^w, \\ \widetilde{x}_1^w, & \text{si } X_2 \neq \widetilde{0}^w \text{ y } X_1 = \widetilde{x}_1^w. \end{cases}$$

1.9. 2) El peso de la función φ es igual a 2. 1.10. 1) Son equivalentes. 2) No son equivalentes. 1.11. 2) Sí, lo es. Por ejemplo, $\varphi_1 = \varphi_{\widetilde{x}^s}$ con $s = 1$ y $\widetilde{x}^s = 0$. 3) No lo es. 1.12. Sí, lo es. El peso es igual a 4. 3) Sí, lo es. El peso es igual a 7. 1.13. 2) Si $r = 3$, entonces en calidad de función adecuada se puede tomar $\varphi(\widetilde{x}^w) = \langle 3/4 \rangle$.

1.16. Con $r = 3$ en calidad de tal función se puede tomar

$$\varphi: \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = (x(t) \oplus x(t-1)) \ \text{ y } \ (t-1), \ t \geqslant 2. \end{cases}$$

1.18. Véase la indicación al problema 1.6, 1).

1.20. 2) Para obtener la respuesta es suficiente examinar la función

$$\varphi(\widetilde{x^w}) = 00\, x(2)\, x(3) \ldots x(t) \ldots$$

1.22. Es un operador engendrado.

1.24. 2) Si $|A| = 1$ y $|B| \geqslant 2$, entonces $|\Phi_{A,B}| = \mathfrak{c}$. Si $|B| = 1$ y $|A| \geqslant 1$ entonces $|\Phi_{A,B}| = 1$.

1.25. 1) Si $|A| > 1$, entonces cada clase $K_j(s)$ tiene una potencia $\mathfrak{c}$. 2) El número de diferentes clases es igual a $|A|^s$.

1.26. 2) Si $|B| = 1$ y $|A| \geqslant 1$, entonces $|\hat{\Phi}_{A,B}| = 1$.

§ 2

2.1. 4) Las ecuaciones canónicas tienen la forma siguiente:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \vee \bar{x}(t)) \bar{q}(t-1), \\ q(t) = (x(t) \vee \bar{x}(t) \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

la señal de entrada $x(t)$ puede ser omitida puesto que la función φ no depende sustancialmente de ella.

2.2. 1) Se puede acabar de determinar el operador de peso 4, descrito con las ecuaciones canónicas siguientes.

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\, q_1(t-1)\, q_2(t-1) \oplus (t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = m(x(t), q_1(t-1), \bar{q}_2(t-1)) \oplus x(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\, (\bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1)) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

2.3. 4) El peso del operador es igual a 3 (se pueden identificar los estados que responden a los pares $(q_1, q_2) = (1, 0)$ y $(q_1, q_2) = (1, 1)$.

2.4. A cada función de peso w (del conjunto indicado de funciones) le corresponde una tabla canónica que contiene $n + 1$ columnas «de entrada» (también se incluye la columna que describe el estado de la función) y $m + 1$ columnas «de salida» (aquí también se toman en cuenta las funciones de transición). En esta tabla hay wk^n colecciones «de entrada». «A la salida» de la tabla tienen que haber algunas colecciones del conjunto que contiene wk^m elementos (colecciones «de salida»). Para obtener la evaluación superior necesaria hay que considerar que a cada colección «de entrada» se le puede cotejar cualquier colección «de salida».

2.8. 3) Las ecuaciones canónicas del operador ψ tienen la forma

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

o sea que el operador ψ es autónomo.

2.9. 1) La ecuación canónica del operador obtenido del operador φ mediante la introducción de la retroacción por las variables x_2 e y_1 tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} y'(t)=1 \\ q'(t)=x_1(t)\,\overline{x}_3(t)\,q'(t-1), \\ q'(0)=0. \end{cases}$$

2.10. 1) El peso del operador es igual a 2.

2.11. 1) En calidad de φ se puede tomar el siguiente a.-d. operador:

$$\varphi:\ \begin{cases} y(t)=x_1(t)\sqrt{q}\,(t-1), \\ q(t)=x_1(t)\oplus x_2(t), \\ q(0)=0. \end{cases}$$

2.14. 1) y 2) Examinar el operador φ_3 (φ_3). 5) Es útil investigar el operador φ_3 ($\varphi_{\equiv 0}$), donde $\varphi_{\equiv 0}$ es un operador engendrado por la constante 0.

2.15. 3) El peso de la superposición es igual a 4. 2.16. 2) El operador es autónomo. 3) El operador no es autónomo. 2.19. 2) Tal esquema existe.

2.22. Primero represente todos los orgrafos posibles de tres vértices, siendo éstos numerados, que satisfacen la condición c) y que tienen el semigrado de salida de cada vértice igual a 2. En calidad de números para los vértices de los orgrafos se pueden coger las cifras 0, 1, 2. Es cómodo considerar inicial al vértice marcado con la cifra 0. Después hay que «cargar» con todos los procedimientos admisibles posibles los arcos de todos los orgrafos construidos de tal manera que resulten diagramas de Moore de algunos a.-d. operadores.

§ 3

3.1. 1) M es una clase cerrada. 2) El conjunto M no es una clase cerrada.

3.3. Con inducción por el número de demoras se puede mostrar que cualquier operador ψ de $[\varphi_0, \varphi_3]_{\mathcal{O}}$ que tiene una entrada transforma la palabra $\widetilde{0}^{\omega}$, bien en una palabra del tipo $y(1)\ \ldots\ y(n_0)\,[0]^{\omega}$, o bien en una palabra del tipo $y(1)\ \ldots\ y(n_0)\,[1]^{\omega}$ donde, n_0 es la longitud del preperíodo (que depende de la elección del operador ψ).

3.7. 1) El sistema no es completo. 2) El sistema es completo.

3.8. 2) $\{\varphi_3(X),\ \varphi_{j_0(x)}(X),\ \varphi_{x_1+x_2}(X_1,\ X_2)\}$.

3.10. La demostración de esta afirmación se puede hacer de la manera siguiente. Sea M una clase cerrada en $\hat{\Phi}_{(k)}$ diferente de todo el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$. Supongamos que M es una clase precompleta y examinemos la reunión de todos aquellos subconjuntos M' de $\hat{\Phi}_{(k)}\setminus M$ que satisfacen la condición: $[M\ \cup\ M']_{\mathcal{O}} \neq \hat{\Phi}_{(k)}$. Esta no es una unión vacía. Elijamos en ella alguna cadena máxima (por inclusión), cuya existencia se puede establecer mediante el teorema de Tsermelo o bien directamente teniendo en cuenta la numerabilidad del conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ (ordenando el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}\setminus M$ por el tipo de una serie natural). La unión de todos los conjuntos de la cadena máxima elegida se denotará por M_0. Enton-

ces $M \cup M_0$ será una clase precompleta en $\tilde{\Phi}_{(k)}$. En la demostración se emplea sustancialmente el hecho de que en el conjunto $\tilde{\Phi}_{(k)}$ existe un sistema completo finito con relación al conjunto de operaciones $\Theta = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

3.13. Este hecho se puede demostrar casi de la misma forma con la que se estableció la veracidad de una afirmación análoga en el álgebra lógica (véase el problema II.1.16).

3.14. Sí, existe (véanse los problemas 3.13 y II.1.25). **3.15.** Compárese con el problema II.1.17.

3.16. Con $k \geqslant 3$ la afirmación se deduce directamente del resultado respectivo en P_k. En el caso general (con $k \geqslant 2$) se puede emplear el subconjunto de operadores autónomos.

3.17. Es numerable. **3.19.** Esto es una potencia continual.

3.20. Es útil emplear «puntos de vista potenciales» o sea comparar las potencias de los respectivos conjuntos.

Capítulo VII

§ 1

1.1. 1) a) $T(P) = 1^3 0^2 1^2$. b) La máquina T no es utilizable para la palabra $1^3 0 1^3$. c) $T(P) = 10\,[01]^2\,1$.

1.2. 4) El programa de una de las posibles máquinas tiene la forma

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0 S$	$q_2 0 S$	$q_3 0 S$
1	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 1 R$

1.3. 2) a) $1^2 0^2 1 q_0 01$; b) $[10]^2\, 0 q_0 1^2$.

1.4. 3) Una de las máquinas de Turing que transforma la configuración K_1 en K_0 se da con el programa siguiente:

$q_1 0 q_2 0 R \quad q_4 1 q_4 1 L$
$q_1 1 q_1 1 R \quad q_5 0 q_6 0 R$
$q_2 0 q_3 1 R \quad q_5 1 q_5 1 L$
$q_2 1 q_2 1 R \quad q_6 1 q_7 0 R$
$q_3 0 q_4 1 L \quad q_7 0 q_0 0 R$
$q_4 0 q_5 0 L \quad q_7 1 q_1 1 R$

1.5. Se puede hacer lo siguiente: en el programa de la máquina de Turing sustituir cada instrucción del tipo $q_i \alpha q_j \beta S$ (donde α y β pertenecen al alfabeto exterior A) por $|A| + 1$ instrucciones: $q_i \alpha q'_j \beta R$, $q'_j \gamma q_j \gamma L$ (γ recorre todo el alfabeto A); q'_j es el estado nuevo (cada estado tiene su q_j).

1.7. Para la construcción de una máquina T_m es suficiente añadir m estados complementarios (nuevos) $q'_1, \ldots, q'_m$ y «completar» el programa de la máquina

T, por ejemplo, con las instrucciones: $q_1' \, aq_1'aS, \ldots, q_m'aq_m'aS$ donde a es cierto símbolo fijo del alfabeto exterior.

1.9. 1) a) La composición T_1T_2 no es utilizable para la palabra $1^30^21^2$. b) T_1T_2 es utilizable para la palabra 1^401 y el resultado de su utilización es 1010^31^2.

1.10. 1) a) La iteración indicada no es utilizable para las palabras del tipo 1^{3k} $(k \geqslant 1)$. b) Tampoco es utilizable para las palabras del tipo 1^{3k+1} $(k \geqslant 1)$. c) La iteración es utilizable para cualquier palabra del tipo 1^{3k+2} $(k \geqslant 1)$ y como resultado se obtendrá la palabra 1.

1.11. 1) a) $T(P) = 10^41$. b) $T(P) = 1^501$.

1.14. 3) Una de las posibles máquinas de Turing

q_10q_00R	q_40q_51L
q_11q_20R	q_41q_41R
q_20q_01S	q_50q_60L
q_21q_30R	q_51q_51L
q_30q_40R	q_60q_10R
$q1_3q_31R$	q_61q_61L

1.16. 3) He aquí una de las posibles máquinas

q_10q_01L	q_31q_40R
q_11q_20R	q_40q_40S
q_20q_20S	q_41q_50R
q_21q_30R	q_50q_11R
q_30q_30S	q_51q_51S

1.17. 1) $f(x) = x + 1$, $f(x, y) = x + y + 2$.

1.18. Si se considera, como se hace corrientemente, que las máquinas comienzan a funcionar en el estado q_1 y en el momento inicial se observa la unidad que está más a la izquierda del código del número x, entonces las máquinas indicadas en las condiciones del problema podrán calcular una de las tres funciones siguientes: x, $x - 1$ y una función indeterminada en todos sus puntos.

1.19. Sí, esta afirmación es verdadera.

1.20. 1) Habiendo un conjunto fijo (¡infinito!) de estados existe sólo un número finito de máquinas de Turing no equivalentes de par en par (con un alfabeto exterior dado). 2) Existe tal l que cualquiera que sea $n \geqslant 1$, el subconjunto de todas las funciones de n lugares en M contiene no más de l elementos.

§ 2

2.1. 2) $x_1 + x_2 - sgx_2$.

2.2. 1) Primero se puede demostrar la recursividad primitiva de las funciones $x_1 \dot{-} x_2$ y x^2 y después emplear la operación de superposición. La «demostración directa» de la recursividad primitiva de la función $g(x) = x^2$ tiene este aspecto:

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(x+1) = h_1(x, g(x)) = x^2 + 2x + 1, \end{cases}$$

o sea que $h_1(x, y) = 2x + y + 1$;

$$\begin{cases} h_1(x, 0) = 2x + 1 = g_1(x), \\ h_1(x, y+1) = s(h_1(x, y)) = (2x + y + 1) + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(0) = 1 \\ g_1(x+1) = h_2(x, g_1(x)) = 2x + 3, \end{cases}$$

o sea que $h_2(x, y) = y + 2$;

$$\begin{cases} h_2(x, 0) = 2, \\ h_2(x, y+1) = s(h_2(x, y)) = (y+2) + 1. \end{cases}$$

2.5. $f(x, y) = \overline{\text{sg}}\, x \cdot g_1(y) + g_2(x \dot{-} 1) \cdot \text{sg}\, x \cdot \overline{\text{sg}}\, y + g_3(x \dot{-} 1, y \dot{-} 1) \times \times \text{sg}\, x \cdot \text{sg}\, y$.

2.7. 2) $\mu_{x_1}([x_1/2]) = 2x_1$. 4) $\mu_{x_1}(x_1 \dot{-} x_2) = (x_1 + x_2)\, \text{sg}\, x_1$, $\mu_{x_2} \times \times (x_1 \dot{-} x_2) = x_1 - x_2$.

2.8. 4) $f(x_1, x_2) = x_1(1 \dot{-} x_2)$.

2.9. No, no es cierto. **2.10.** 1) No se puede. 2) $1 + \text{sg}\, x$. **2.12.** Todas estas clases son numerables-infinitas. **2.17.** No, no es cierto: la función $f_2(x, y)$ puede ser incluso idénticamente igual a 0. **2.18.** 1) No, no es justo. **2.19.** 3) Es justo. 4) Es justo.

2.20. 1) Sí, puede ser cierto. 2) Esta afirmación es falsa para cualquier función f_1 de $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. 3) La afirmación es justa para ciertas funciones f_1 y f_2 del conjunto $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$.

2.21. 1) No, no siempre. 2) Esta inclusión es falsa para cualquier función $f(x)$ de $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. 3) Sí, la relación es justa para cualquier función $f(x)$ de $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$.

2.24. 2) No puede. **2.26.** Sí, es cierto.

§ 3

3.1. a) Se deduce de que en K_{pr} existe una función que toma todos los valores.

3.2. A toda función primitivamente recursiva se le puede cotejar un conjunto infinito de términos que reflejan el procedimiento de obtención de la función de las funciones simplísimas.

3.3. Si existe una función universal parcialmente recursiva $F(x_0, x_1, \ldots \ldots, x_n)$ pues ella está siempre determinada. Entonces la función $F(x_1, x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n) + 1$ es recursiva en general y tiene cierto número y en la numeración que responde a la función universal $F^{(n+1)}$. Pero entonces $F(y, y, \ldots, y) = F(y, y, \ldots, y) + 1$.

3.6. Hacer la demostración con el método de «diagonalización». **3.7.** 1) — 4) No. 5) Sí. **3.8.** Analógicamente al 3.3.

3.11. Examinar la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } h(x) = 0, \\ 1, & \text{si } h(x) = 1. \end{cases}$$

3.12. Examinar una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tal, que $\alpha_i = 1$, si $\varphi_i(i)$ está determinado, y $\alpha_i = 0$, si $\varphi_i(i)$ no está determinado, $i = 0, 1, \ldots$

3.13. Para todo autómata finito autónomo su sucesión de salida es casi periódica.

3.15. Por ejemplo, palabras invertidas.

3.21. Se deduce, de que existe no más de $c^{S_T(P)}$ diferentes configuraciones de longitud $S_T(P)$ para cierto c, que depende del alfabeto de los estados y del alfabeto exterior de la máquina T. Si se repite cierta configuración, entonces la máquina T trabaja un tiempo infinito.

Capítulo VIII

§ 1

1.1. 1) Cada uno de los términos de la permutación puede ser elegido independientemente de los demás de n maneras. Por eso, $\hat{P}(n, r) = n^r$. 2) El primero de los términos de una (n, r)-permutación se puede elegir de n maneras. Si ya se han elegido i elementos, entonces el $(i+1)$-ésimo se puede elegir de $n-i$ maneras. Aplicando varias veces la regla de la multiplicación se obtiene $P(n, r) = (n)_r$, $n \geqslant r$. 3) Es suficiente observar que de cada (n, r)-combinación mediante $r!$ permutaciones de sus términos se pueden obtener $r!$ diferentes (n, r)-permutaciones y cada (n, r)-permutación puede ser obtenida de esa manera. 4) A cada (n, r)-combinación A con repeticiones, compuesta de elementos del conjunto $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ le cotejaremos el vector $\widetilde{\alpha}(A)$ de longitud $n+r-1$ de r ceros y $n-1$ unidades tal, que el número de ceros que se encuentran entre las unidades $(i-1)$-ésima e i-ésima es igual al número de elementos a_i que entran en la combinación A, $i = \overline{2, n-1}$ y el número de ceros que hay delante de la primera unidad (después de la $(n-1)$-ésima unidad), es igual al número de elementos a_1 (respectivamente, de elementos a) que entran en la combinación A Esta correspondencia entre las combinaciones y los vectores es recíprocamente unívoca. Por otra parte el número de vectores con $n-1$ unidades y r ceros es igual al número de subconjuntos de $(n-1)$-elementos de un conjunto de $(n+r-1)$-elementos. Este número es igual a $\binom{n+r-1}{n-1}$.

1.2. 1) k^n; 2) $k_1 k_2 \ldots k_n$; 3) $\binom{n}{r}$. 1.3. 1) 2^{mn}; 2) $(2^m)_n$.

1.4. Para cada $n \geqslant 1$ harán falta $n \cdot 10^{n-1}$ cifras para cada cifra diferente de cero y $(n-1) \cdot 10^{n-1}$ ceros. 1.5. $2^{p+k}3^{n-p-k} - 1$.

1.6. 1) 147; 2) 126; 3) $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26820600$, si se diferencian los nombres, y $300 + 300^2 + 300^3$, si los nombres no son forzosamente diferentes.

1.7. $\binom{m}{r}\binom{n}{s}$.

1.8. 1) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)$. A cada divisor $p_{i_1}^{\beta_1} \ldots p_{i_r}^{\beta_r}$, $0 \leqslant \beta_l \leqslant \alpha_l$, $l = \overline{1, r}$ se le puede cotejar el vector $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$; 2) 2^r; 3) $\prod_{k=1}^{r} \frac{1-p_k^{\alpha_k-1}}{1-p_k}$.

Abriendo los paréntesis en la expresión $(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ldots(1+p_r+$ $+\ldots+p_r^{\alpha_r})$ convencerse de que cada divisor está presente en la suma exactamente una vez.

1.9. 1) $\binom{n-\alpha-\beta}{p-n-k}$; 2) $\frac{p!}{h!\,k!}\binom{n-\alpha-\beta}{p-h-k}$.

1.10. 1) $\binom{n+k-1}{k-1}$. El número de maneras es igual al número de vectores binarios de longitud $n+k-1$ con n unidades y $k-1$ ceros. La correspondencia se establece de la manera siguiente: a cada suma se le coteja un vector tal que el primer sumando en la suma es igual al número de unidades que hay en el vector ante el primer cero, el segundo sumando, al número de unidades que hay entre el primero y el segundo cero, etc. 2) $\binom{n-1}{k-1}$. Colocamos k unidades en cada intervalo entre los ceros de tal manera que haya una unidad entre cada dos ceros (el lugar que está a la izquierda del primer cero y a la derecha del último también se consideran intervalos). Las demás $n-k$ unidades se distribuyen arbitrariamente. El problema se reduce al anterior.

1.11. 1) $\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, véase el problema 1.10, 2); 2) $\binom{n+9}{9}-1$, reducir el problema al 1.10, 1); 3) $\binom{n+k}{n}$, reducir el problema al 1.10, 1).

1.12. 1) $\binom{n+2}{2}$; 2) $\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}^2+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^2$.

1.13. 1) $k!$; 2) $\binom{k}{p}\cdot k!$; 3) $(n)_k\,(m)_k$; 4) $\frac{(n)_k\,(m)_k}{k_1!\,\ldots\,k_s!}$.

1.14. 1) $4(n-4)$; 2) $4(n-1)\,n$; 3) $24n(n-1)$; 4) $4\binom{n}{5}$; 5) $4^5(n-4)$; 6) $4n\times$ $\times\binom{4n-4}{2}$; 7) $6\cdot4^3\cdot n\binom{n-1}{3}$.

1.15. 5) Utilizar el 3).

1.16. 3) Examinar la relación $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}$. Esta relación es mayor que 1 con $k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, y menor que 1 con $k>\left]\frac{n}{2}\right[$. 5) Si en la suma están presentes dos coeficientes binominales $\binom{n_i}{k}$ y $\binom{n_j}{k}$ tales, que n_i- $-n_j>1$, entonces, sustituyéndolos por $\binom{n_i-1}{k}$ y $\binom{n_j+1}{k}$ respectivamente, obtendremos una suma menor que la inicial.

1.17. 1) Resolución. Pondremos que $\alpha_{n-1}=\left[\frac{m}{(n-1)!}\right]$. Supongamos que los coeficientes $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{n-i}$ ya están determinados, entonces $\alpha_{n-(i+1)}=$

$$=\left[\frac{m-\alpha_{n-1}(n-1)!-\alpha_{n-2}(n-2)!-\ldots-\alpha_{n-i}(n-i)!}{(n-i-1)!}\right].$$

Demostremos la unicidad de la representación razonando por el contrario. Supongamos que a cierto m le corresponden dos vectores $\widetilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ y $\widetilde{\beta}(m) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Supongamos que j es el mayor de los números de los órdenes en los que los vectores se diferencian. Sin limitación de generalidad se puede considerar que $\alpha_j < \beta_j$. Tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i i! - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i i! \geqslant (\beta_j - \alpha_j)\, j! - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i i! \geqslant j! - \sum_{j=1}^{j=1} i \cdot i! > 0.$$

Hemos llegado a una contradicción. 2) (1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 0, 2, 1). 3) $\widetilde{\alpha}_1$ a ninguno, $\widetilde{\alpha}_2$ le corresponde el número 109. 4) A cada número entero m $(0 \leqslant m < n!)$ le cotejamos una permutación π_m de los números $1, \ldots, n$. Mediante el vector $\widetilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ indicamos el lugar de los números $1, \ldots, n$ en la permutación π_m. Ponemos el número 1 en el lugar con el número $1 + \alpha_{n-1}$. Supongamos que los números $1, \ldots, i$, $i = \overline{1, n-1}$ ya están colocados. Quedan todavía libres $n - i$ lugares. Numeramos los lugares libres con los números $1, 2, \ldots, n - i$. Ponemos el número $i + 1$ en el lugar con el número $1 + \alpha_{n-i-1}$. Después de que todos los números $1, 2, \ldots, n - 1$ ya están colocados, el lugar de los números n en π_m se determina unívocamente. EJEMPLO. $m = 15$, $n = 4$, $\widetilde{\alpha}(m) = (1, 1, 2)$, $\pi_m = (4, 2, 1, 3)$. El algoritmo de la enumeración sin repetición de todas las permutaciones consiste en la generación secuencial de los números m $(0 \leqslant m < n!)$ y las permutaciones π_m que les corresponden.

1.18. 1) Las coordenadas del vector $\widetilde{\beta}(m) = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ se determinan de la manera siguiente: β_1 es el mayor número entero tal, que $m \geqslant \binom{\beta_1}{k}$. Si $\beta_1, \ldots, \beta_i$ ya están determinados, entonces β_{i+1} es el mayor número entero tal, que $m - \binom{\beta_1}{k} - \binom{\beta_2}{k-1} - \ldots - \binom{\beta_i}{k-i+1} \geqslant \binom{\beta_{i+1}}{k-1}$. La unicidad se demuestra de la misma manera que en 1.17, 1). 2) 23. 3) (6, 4, 1, 0).

4) Cotejaremos a cada número entero m $\left(0 \leqslant m < \binom{n}{k}\right)$ un vector binario $\widetilde{\alpha}_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mediante el vector $\widetilde{\beta}(m) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ (véase 1). Supongamos que en $\widetilde{\alpha}_m$ las unidades están en las coordenadas con los números $\beta_1 + 1, \beta_2 + 1, \ldots, \beta_k + 1$. EJEMPLO. $m = 17$, $n = 6$, $k = 3$, $\beta(m) = (5, 4, 1)$, $\widetilde{\alpha}_m = (010011)$. El algoritmo consiste en generar números m y los vectores que les corresponden. Otro algoritmo. Comenzaremos la enumeración desde el vector $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, cuyas primeras k coordenadas son iguales a 1 y las restantes a cero. Examinemos el vector binario arbitrario $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e indiquemos el que le sigue en el proceso de enumeración $\widetilde{\alpha}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Hallaremos el menor número j tal, que $\alpha_j = 1$, $\alpha_{j+1} = 0$. Entonces hacemos $\alpha'_j = 0$, $\alpha'_{j+1} = 1$ (desplazamos una unidad a la derecha) y todas las unidades que están en las coordenadas con números menores que j, las desplazamos a la izquierda todo lo que se pueda. EJEMPLO. $\widetilde{\alpha} = (001101)$, $j = 4$, $\widetilde{\alpha}' = (100011)$.

1.20. 2) Poner en (1) $t=-1$. 3) Derivar (1) y hacer $t=1$. 6) Integrar la identidad (1) de 0 a 1. 7) Véase el 6). 8) Efectuar la inducción por n empleando el 7); otro procedimiento: examinar $\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$. 9) Comparar los coeficientes de t^k de la parte izquierda y derecha de la identidad $(1+t)^n(1+t)^m=(1+t)^{n+m}$. 10) En 9) hacer $m=n$. 13) Emplear la identidad $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$. 14) Se reduce al 9),

1.21. 1) $2\sum_k \binom{n}{2k}=(1+1)^n+(1-1)^n=2^n$

2) $4\sum_k \binom{n}{4k}=(1+1)^n+(1+i)^n+(1+i^2)^n+(1+i^3)^n=2^n+2^{n/2+1}\cos\times$ $\times\frac{\pi n}{4}$;

3) $\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r}{m}\nu}\left(1+e^{\frac{2\pi i\nu}{m}}\right)^n=$

$$=\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r}{m}\nu}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_k \binom{n}{mk+s} e^{\nu\frac{2\pi i(lk+s)}{m}}=$$

$$=\sum_k\sum_{s=0}^{r-1}\binom{n}{mk+s}\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i(lk+s-r)}{m}\nu}=m\sum_k\binom{n}{mk+r};$$

en el último caso se ha empleado la identidad

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i n}{m}\nu}=\begin{cases} m, \text{ si } n \text{ es múltiplo de } m,\\ 0 \text{ en el caso contrario.}\end{cases}$$

1.22. 1) $\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n\right]$.

2) $\frac{(1+\sqrt[4]{-2})^n+i(1+i\sqrt[4]{-2})^n-(1-\sqrt[4]{-2})^n-i(1-i\sqrt[4]{-2})^n}{4\sqrt[4]{-2}}$.

3) RESOLUCIÓN. Empleando la identidad del problema 1.15, 2) se transforma la expresión inicial en

$$\binom{n}{r}\sum_k(-3)^k\binom{n-r}{2k+1-r}=$$

$$=(-3)^{\frac{r-1}{2}}\binom{n}{r}\sum_k(-3)^{\frac{2k+1-r}{2}}\binom{n-r}{2k+1-r}.$$

Examinemos el caso en el que r es par (el caso en el que r es impar es análogo). Ponemos $2\nu = 2k - r$. Entonces llegamos a la expresión

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}} \binom{n}{r} \sum_{\nu} (\sqrt{-3})^{2\nu+1} \binom{n-r}{2\nu+1} =$$

$$=(-1)^{\frac{r-1}{2}} \binom{n}{r} \frac{(1+\sqrt{-3})^{n-r}-(1-\sqrt{-3})^{n-r}}{2}.$$

1.24. 2) Con $|t|<1$ la serie converge. La identidad se establece mediante la descomposición de la función $f(t)=(1+t)^a$ por los grados t. Hay que convencerse de que $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{a}{k}$.

3) $\binom{-a}{k}=\frac{(-a)(-a-1)\ \dots\ (-a-k+1)}{k!}=(-1)^k\binom{a+k-1}{k}$.

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a-k}{r}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{a-k+1}{r+1}-\binom{a-k}{r+1}\right]=\binom{a+1}{r+1}-\binom{a-n}{r+1}$.

5) Emplear la identidad $(1+t)^a(1+t)^b=(1+t)^{a+b}$. 6) Se deduce del 5). Si se pone $b=-1$. 7) Consecuencia de las identidades de los problemas 3) y 5). 9) Emplear la identidad $(-4)^k\binom{2k}{k}=\binom{-1/2}{k}$. 10) y 11) Véase el problema 1.22.

1.25. 1) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$. 2) $\frac{n!}{k_1!\ \dots\ k_s!}$. 3) Calculamos con dos procedimientos el número $A_n(k_1, \dots, k_s)$ de ordenaciones de n objetos entre los cuales hay k_1 objetos del primer tipo, k_2 del segundo tipo, etc., y, por fin k_s objetos del tipo s. PRIMER PROCEDIMIENTO. En principio elegimos k_1 lugares entre n para colocar los objetos del primer tipo. Esto se puede hacer de $\binom{n}{k_1}$ maneras. Después se escogerán k_2 lugares para ubicar los objetos del segundo tipo. Eso se puede hacer de $\binom{n-k_1}{k_2}$ maneras, etc. Utilizando la «regla de la multiplicación» obtendremos que

$$A_n(k_1, \dots, k_s)=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\ \dots\ -k_{s-1}}{k_s}.$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO. Calculamos el número de ordenaciones n de objetos diferentes de par en par. Consideramos que los objetos están divididos en s grupos de tal manera, que en el i-ésimo grupo hay k_i objetos ($i=\overline{1, s}$). La elección de k_1 lugares para los objetos del primer grupo, de k_2 lugares para los objetos del segundo grupo, etc., se puede realizar de $A_n(k_1, \dots, k_s)$ maneras. En el grupo i los objetos se pueden situar de k_i maneras ($i=\overline{1, s}$). De ahí que $A_n(k_1, \dots, k_s)\, k_1! \dots k_s! = n!$

§ 2

2.1. 1) DEMOSTRACIÓN. Para $n = 1$, $\hat{N}_0 = N - N(\alpha_1) = S_0 - S_1$ y la fórmula (2), evidentemente, es válida. Supongamos que la fórmula es válida para $n - 1$ propiedades y que $N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1})$ es el número de objetos que no poseen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Tenemos:

$$\hat{N}_0 = N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}) =$$
$$= N - \sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) - \ldots -$$
$$- (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}). \quad (*)$$

Esta fórmula también es válida para el conjunto de objetos que poseen la propiedad α_n:

$$N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_n) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad (**)$$

donde $N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$ es el número de objetos que poseen la propiedad α_n pero no poseen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Está claro que

$$N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \bar{\alpha}_n) = N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}) -$$
$$- N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n).$$

Restando la fórmula (**) de la fórmula (*) obtenemos la fórmula (2). 2) Demostración con inducción por el número de propiedades. 3) Al observar que $\hat{N}_{k+1} = \hat{N}_k - N_k$ emplear inducción por k. 4) Deducimos, por ejemplo, el (5) del (3). Suponiendo que en (3) $m = n$, obtenemos $\hat{N} = S_n$ en concordancia con (5). Supongamos que la fórmula (5) es válida para todos los $k \geqslant n - \nu + 1$, $\nu \geqslant 1$. Sustituyendo en (3) m por $n - \nu$ y empleando una suposición inductiva, ponemos en lugar de $S_{n-\nu+k}$ para cualquier $k \geqslant 1$ el segundo miembro de la igualdad (5) en la que k está sustituido por $n - \nu + k$. Entonces

$$S_{n-\nu} = \hat{N}_{n-\nu} - \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k \binom{n-\nu+k}{n-\nu} \sum_{m=n-\nu+1}^{n} \binom{m}{n-\nu+k} \hat{N}_m =$$
$$= N_{n-\nu} - \sum_{m=n-\nu+1}^{n} \binom{m}{n-\nu} \hat{N}_m \sum_{k=1}^{m-n+\nu} (-1)^k \binom{m-n+\nu}{k} =$$
$$= \sum_{m=n-\nu}^{n} \binom{m}{n-\nu} \hat{N}_m.$$

Así que la fórmula (5) está demostrada. La fórmula (6) se demuestra de manera análoga, para eso es suficiente convencerse de que $R(n, r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{m} \times$

$\times\ S_k \geqslant 0$, para todos los r. Emplearemos la fórmula (5). Tenemos

$$R(n,\ r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{m}\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}\hat{N}_\nu=\sum_{\nu=r}^{n}\hat{N}_\nu\sum_{k=r}^{\nu}(-1)^{k-r}\binom{k}{m}\binom{\nu}{k}=$$

$$=\sum_{\nu=r}^{n}\hat{N}_\nu\binom{\nu}{m}\sum_{k=r}^{\nu}(-1)^{k-r}\binom{\nu-m}{k-m}=\sum_{\nu=r}^{n}\hat{N}_\nu\binom{\nu}{m}\binom{\nu-m-1}{r-m-1}\geqslant 0.$$

2.2. Para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ las probabilidades son respectivamente $\frac{3}{8},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{24}$.

2.3. 1) El número de distribuciones de objetos, en las que k cajas dadas se quedarán vacías, es igual a $(n-k)^r$, $S_k=\binom{n}{k}(n-k)^r$. Ahora queda emplear la fórmula (2). 2) Utilizar el resultado del problema 2.1, 2). 3) aplicar la fórmula (4) de 2.1, 3).

2.4. 1) 20%; 2) 60%; 3) 70%.

2.5. 1) RESOLUCIÓN. $S_0=13$, $S_1=23$, $S_2=12$, $\hat{N}=0$. Según la fórmula (2) $0=13-23+12-S_3$, de donde $S_3=2$; 2) 6; 3) 3.

2.6. 2) 542; 3) 734; 6) 53.

2.7. 1) 3^n. RESOLUCIÓN. Examinemos el diagrama de Venn; Cada uno de los n elementos del conjunto U puede pertenecer o no pertenecer a cada uno de

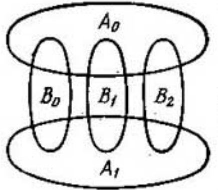
	X	$\overline{X}$
Y	$\varnothing$	
$\overline{Y}$		

los conjuntos X, Y, teniendo en cuenta que según el enunciado $X \cap Y=\phi$. De esto se deduce que el número de los pares buscados $(X,\ Y)$ es igual al número de n disposiciones de diferentes objetos en tres cajones (el papel de los cajones lo cumplen las casillas $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$, $\overline{X}\overline{Y}$ del diagrama). Pero el número de tales disposiciones es, evidentemente, igual a 3^n. 2) $n2^n$.

3) 3^n. INDICACIÓN. Observar que de la condición se deduce que

$$\overline{X}\cap Y\cap\overline{Z}\cup X\cap\overline{Y}\cap Z\cup X\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}=U.$$

De este modo, el problema se reduce al cálculo del número de las colocaciones de los elementos del conjunto U por tres casillas $\overline{X}Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}Z$, $X\overline{Y}\overline{Z}$ del diagrama correspondiente.



4) $3^n-\frac{n^2+7n+16}{8}\cdot 2^n+\frac{n(n^2+3)}{2}+1$.

Resolución. Del número total 3^n de pares $(X,\ Y)$ que satisfacen la condición del problema 1) hay que excluir los pares que pertenecen al conjunto $C=A_0\cup A_1\cup B_0\cup\cup B_1\cup B_2$, donde $A_0=\{(X,\ Y):|X|=0\}$, $A_1=\{(X,\ Y):$ $:|X|=1\}$, $B_0=\{(X,\ Y):|Y|=0\}$, $B_1=\{(X,\ Y):$ $|Y|=1\}$, $B_2=\{(X,\ Y):|Y|=2\}$. Es evidente que

$A_0 \cap A_1 = \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(0 \leqslant i < j \leqslant 2)$. Por eso $|C| = |A_0| + |A_1| + |B_0| + |B_1| + |B_2| - |A_0 \cap B_0| - |A_0 \cap B_1| - |A_0 \cap B_2| - |A_1 \cap B_0| - |A_1 \cap B_1| - |A_1 \cap B_2|$ (véase la figura). No es difícil notar que $|A_0| = 2^n$ (n elementos del conjunto U se distribuyen por las casillas $\bar{X}Y$ y XY. Las casillas XY y $X\bar{Y}$ son vacías puesto que $X = \varnothing$). Analógicamente, $|A_1| = n \cdot 2^{n-1}$, $|B_0| = 2^n$, $|B_1| = n \cdot 2^{n-1}$, $|B_2| = \binom{n}{2} 2^{n-2}$. Continuando, tenemos $|A_0 \cap B_0| = 1$, $|A_0 \cap B_1| = |A_1 \cap B_0| = n$, $|A_1 \cap B_1| = n(n-1)$, $|A_0 \cap B_2| = \binom{n}{2}$, $|A_1 \cap B_2| = n\binom{n-1}{2}$. De aquí que $|C| = (n+2)\,2^n + n(n-1)\,2^{n-3} - \frac{n(n^2+3)}{2} - 1$, y el número de los pares buscados es igual a $3^n - |C|$. 5) $2n(2^n-1)$. 6) $(n+2)\,2^{n-1} - 4n - 2$.

2.8. Calculamos el número $N_{n,k}$ de maneras de acomodar a los invitados de tal forma, que los k pares dados de caballeros enemigos no estén separados. Unimos cada uno de los k pares enemigos dados en un «objeto». Entonces habrá $2n - k$ objetos que se pueden colocar de $(2n-k)!$ maneras. En cada uno de los k pares enemigos dados se pueden cambiar de sitio los enemigos. Así que $N_{n,k} = 2^k(2n-k)!$ y $S_k = \binom{n}{k} N_{n,k}$. Empleando la fórmula (2) obtenemos que el número buscado es igual a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$

2.9. $2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)_k [(n-k)!]^2$.

§ 3

3.2. 1) $c_1 + c_2 3^n$; 2) $c_1(\sqrt{-3})^n + (-1)^n c_2 (\sqrt{-3})^n$;

3) $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$; 4) $(-1)^n(c_1 + c_2 n)$; 5) $(c_1 + c_2 n)(-4)^n + c_3(-2)^n$; 6) $(-1)^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)$.

3.3. 1) La solución general tiene la forma $a_n = c_1 + c_2 3^n$. De las condiciones iniciales tenemos $c_1 + 3c_2 = 10$, $c_1 + 9c_2 = 16$, de donde $c_1 = 7$, $c_2 = 1$. Así que $a_n = 7 + 3^n$. 2) $3^n + i^n + (-i)^n$. 3 $c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n$, donde $c_1 = \frac{14-b-4c}{9}$, $c_2 = \frac{b+c-2a}{3}$, $c_3 = \frac{2b-c-a}{18}$. 4) $\cos \alpha n$.

3.4. 1) $a = \frac{\alpha}{1+p+q}$, $b = \frac{(1+p+q)\beta - \alpha(2+p)}{(1+p+q)^2}$; 2) $a = \frac{\alpha}{2p+4}$, $b = \frac{\alpha(-p-4) + 2\beta(p+2)}{2(2+p)^2}$; 3) $a = \frac{\alpha}{6}$, $b = \frac{\beta-\alpha}{2}$.

3.5. 1) $1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Se busca una solución parcial de la ecuación $a_{n+1} - a_n = n$ en forma de $a_n^* = n(an+b)$. Sustituyendo a_n^* en la relación inicial,

encontraremos que $a_n^* = \frac{n(n-1)}{2}$. Hagamos la sustitución $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + b_n$, entonces, $b_{n+1} - b_n = 0$. De aquí que $b_n = c$, donde c es una constante y $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + c$. De las condiciones iniciales se encuentra que $c = 1$. 2) $-2(-4)^n + 3\cdot 2^n + 5^n$.

INDICACIÓN. Se busca la solución parcial en forma de $a_n^* = c\cdot 5^n$. 3) $0{,}5 + 50\cdot 2^n + 6{,}5\cdot 3^n - 4n^3 - 13n^2 - 50n$.

3.6. 1) No degenerado es el caso en el que, o bien $q_1 \neq 0$ o bien $p_2 \neq 0$. Si $q_1 = p_2 = 0$, entonces es evidente que $a_n = c_1 p_1^n$, $b_n = c_2 q_2^n$. Sea $q_1 \neq 0$. Entonces $b_n = \frac{1}{q_1}(a_{n+1} - p_1 a_n)$, $b_{n+1} = \frac{1}{q_1}(a_{n+2} - p_1 a_{n+1})$. Sustituyendo b_{n+1} y b_n en la segunda relación, obtenemos $a_{n+2} + (-p_1 - q_2)a_{n+1} + (p_1 q_2 - p_2 q_1)a_n = 0$. El problema se ha reducido al 3.1. 2) $a_n = (5 + 2n)2^n$, $b_n = -(1 + 2n)2^n$. 3) $a_n = c_1 + (-1)^{n+1}c_2 + 5{,}5n$, $b_n = c_1 + 0{,}5 + (-1)^n c_2 + 5{,}5n$.

3.7. 1) INDUCCIÓN POR n. Con $n = 2$ la relación $F_{2+m} = F_1 F_m + F_2 F_{m+1} = F_m + F_{m+1}$, es válida para todos los $m \geqslant 1$. El paso inductivo $n \to n + 1$: $F_{n+1+m} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1} + F_{n-2}F_m + F_{n-1}F_{m+1} = F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1}$. 2) Hacer inducción por k empleando el 1). 4) PROCEDIMIENTO DE REPRESENTACIÓN. Seleccionamos el mayor n_1 tal, que $F_{n_1} \leqslant N$; después el mayor n_2 tal, que $F_{n_2} \leqslant N - F_{n_1}$, etc. La unicidad y otras propiedades de la representación se demuestran directamente por inducción. 5) INDICACIÓN. Hallar la solución de la relación $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con las condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$. 6), 7), 8) Demostrar con inducción por n.

3.8. 1) La función generatriz de la sucesión a^n es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$. Si $|at| < 1$, entonces la serie converge a la función $A(t)$. En consecuencia, con $|at| < 1$ la función $A(t)$ es generatriz para $\{a^n\}$. La función exponencial generatriz de la sucesión a^n es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$. Esta serie converge a la función e^{at} con todos los t. 2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ que es una función generadora para $a_n = n$ se obtiene al diferenciar cada término de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ y multiplicarlo a continuación por t. Con $|t| < 1$ es admisible emplear estas operaciones y eso lleva a la función $t(1-t)^{-2}$. La función generatriz exponencial es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t \exp t$.

$$3.9.\ 1)\ A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(xt)^n\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} E(xt)\, dx;$$

2) $\int_0^\infty e^{-x}e^{xt}\,dx=\frac{1}{1-t}\int_0^\infty e^{-u}\,du=(1-t)^{-1}$.

3.11. 1) Multipliquemos la igualdad $a_n=b_n-b_{n-1}$ por t^n y la sumamos por n. En el dominio de la convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$ son válidas las identidades $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n-1})\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n-$ $-\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}t^n=B(t)(1-t)$. 3) Observar que $b_n=a_{n-1}-a_n$. De aquí que $B(t)=$ $=-A(t)(1-t)+a_0$, $a_0=B(1)$.

3.12 1) PRIMER PROCEDIMIENTO. Sea $C(t)$ una función generatriz de la sucesión 1, 0, 0, ... Según el enunciado $C(t)=A(t)\,B(t)$. En consecuencia, se tienen que cumplir las igualdades $1=a_0b_0$, $0=a_0b_1+a_1b_0$, $\ldots, 0=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i$, ... Como $a_n=\binom{m}{n}$, entonces para todos los $n=1, 2, \ldots \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{n-i}b_i=0$, y para $n=0$ $\binom{m}{0}b_0=1$. Hallamos sucesivamente $b_0=1$, $b_1=-m$, $b_2=$ $=\frac{m(m+1)}{2}$, $b_3=-\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$. Con inducción por n no es difícil mostrar que $b_n=\binom{-m}{n}$. Así que $B(t)=(1+t)^{-m}$. SEGUNDO PROCEDIMIENTO. $A(t)=(1+t)^m$, $B(t)=[A(t)]^{-1}=(1+t)^{-m}$. De aquí que $b_n=\binom{-m}{n}$. 2) $B(t)=$ $=1-at$, $b_0=1$, $b_1=a$, $b_n=0$ con $n\geqslant 2$. 3) $B(t)=(1-t)^2$, $b_0=b_2=1$, $b_1=-$ -2, $b_n=0$ con $n\geqslant 3$. 4) $B(t)=(1+t^2)^{-1}$, $b_{2n}=(-1)^n$, $b_{2n+1}=0$. 5) $B(t)=$ $=\frac{t}{e^t-1}$; $b_0=1$, $b_1=-\frac{1}{4}$, $b_{2n+1}=0$, $n\geqslant 1$, $b_{2n}=\frac{(-1)^nB^n}{n!}$, donde B_n es el número de Bernoulli con el número de orden n. 6) $B(t)=\sqrt{1+t}$, $b_n=$ $=\binom{1/2}{n}$.

3.14. 1) $\binom{m}{n}q^{m-n}p^n$; 2) 1; 3) $(-1)^n\binom{1/2}{n}$; 4) $(-1)^{n-m}\binom{m}{n-m}$; 5) $(-1)^{n-m}\sum_k(-1)^{k(r-1)}\binom{m}{k}\binom{-m}{n-m-kr}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}\binom{-m}{n/2}$ con n par, y 0 con n impar; 7) $\binom{-m}{n-2}2^{n-2}-\binom{-m}{n-3}2^{n-3}$; 9) $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; 10) $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. INDICACIÓN. Aprovechar que $\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} t$; 11) $\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\times$

$\times \frac{1}{2n+1}$. INDICACIÓN. $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arc sen } t$; 12) $(-2)^{n/2}\frac{1}{(n/2)!}$ con n par, y 0 con n impar; 13) $\frac{(-1)^{n/2}}{(n/2+1)!}$ con n par, y 0 con n impar; 14) $(-1)^n \frac{n!}{m!} \times \times \binom{n-1}{m-1}$.

3.15. 1) Comparemos los coeficientes de t^{n-1} en la identidad $(1+t)^n(1+ +t)^{-m-2}=(1+t)^{n-m-2}$. Por una parte este coeficiente es igual a $\sum_s \binom{n}{n-s} \times \times \binom{-m-2}{s-1} = \sum_s (-1)^{s-1}\binom{n}{s}\binom{m+s}{m+1}$, y por otra, $\binom{n-m-2}{n-1}=(-1)^{n-1}\times \times \binom{m}{n-1}$. 2) INDICACIÓN. $\binom{m}{s}\binom{s}{n}=\binom{m}{n}\binom{m-n}{m-s}$. 3) Examinar la identidad $\left(1-\frac{1}{t}\right)^m(1-t)^{-n-1}=\frac{(-1)^m}{t^m}(1-t)^{m-n-1}$. Examinar la identidad $[(1+ +t)^n+(1-t)^n]^2=(1+t)^{2n}+(1-t)^{2n}+2(1-t^2)^n$. 5) Examinar la identidad $[(1+t)^n+(1-t)^n][(1+t)^n-(1-t)^n]=(1+t)^{2n}-(1-t)^{2n}$. 6) Examinar la identidad $\sum_{k=0}^{n}(1+2t)^{n+k+1}(-t^2)^{n-k}=(1+2t)^{n+1}\frac{(1+2t)^{n+1}-(-t^2)^{n+1}}{(1+t)^2}$ y comparar los coeficientes para t^{2n+1}.

3.16. 1) Multiplicando por t^{n+2} y sumando, obtendremos $A(t)=a_1t-a_0+ +ptA(t)-pa_0t+qA(t)t^2$. 2) Presentaremos $A(t)$ en la forma $\frac{c_1}{1-\lambda_1 t}+ +\frac{c_2}{1-\lambda_2 t}$. Hallando c_1 y c_2 obtendremos que $A(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{a_1+pa_0+\lambda_1 a_0}{1-\lambda_1 t}- -\frac{a_1+pa_0+\lambda_2 a_0}{1-\lambda_2 t}\right)$. Al hallar el coeficiente de t^n en la descomposición de $A(t)$ en serie por el exponente t obtendremos la expresión para a_n. 3) Presentemos $A(t)$ en la forma $\frac{c_1}{1-\lambda t}+\frac{c_2}{(1-\lambda t)^2}$. De la igualdad $\frac{c_1}{1-\lambda t}+ +\frac{c_2}{(1-\lambda t)^2}=\frac{a_0+(a_1-2\lambda a_0)t}{(1-\lambda t)^2}$ hallamos que $c_1=-\frac{a_1}{\lambda}+2a_0$, $c_2=\frac{a_1}{\lambda}-a_0$. Descomponiendo $A(t)$ en serie, obtendremos $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_1\lambda^n+c_2(n+1)\lambda^n)t^n$, $a_n= =\left(a_0+n\left(\frac{a_1}{\lambda}-a_0\right)\right)\lambda^n$.

3.17. 3) $A(t)=\frac{1-t}{1-3t+t^2}$, $B(t)=\frac{t}{1-3t+t^2}$; 4) Deducir de 3) que

$$a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.18. 1) Multiplicando por t^n y sumando la relación inicial obtenemos $A(t) - a_0 = tA^2(t)$.

3.19. 1) Numeramos los vértices del $(n+2)$-ágono con las cifras 1, 2, ..., $n+2$ en el sentido de las agujas del reloj. Son posibles dos casos. PRIMER CASO. Por el vértice $n+2$ no pasa ninguna diagonal. Entonces tiene que existir una diagonal entre los vértices 1 y $n+1$ y el número de maneras de partición es igual a a_{n-1}. SEGUNDO CASO. Existe una diagonal que sale del vértice $n+2$. Sea k un número menor tal, que el vértice $k+1$ está unido con una diagonal al vértice $n+2$. Si $k \geqslant 2$, entonces existe una diagonal del tipo $(1, k+1)$. Entonces el número de particiones del $(n+2)$-ágono inicial es igual al número de particiones del $(k+1)$-ágono con vértices $1, 2, \ldots, k+1$, multiplicado por el número de particiones del $(n-k+2)$-ágono con vértices $k+1, k+2, \ldots$ . . ., $n+2$, o sea que es igual a $a_{k-1}a_{n+k}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Es natural considerar que $a_0=1$. Entonces tendremos $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}$. Lo mismo que en el problema 3.18, hallamos que $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. 2) $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Se resuelve en forma análoga al problema 1);

3.20. 1) Multiplicando por t^n y sumando por n obtendremos para la función generatriz $A(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ la ecuación funcional $A^2(t) = A(2t)$. Buscaremos su solución en la forma $A(t) = e^{\alpha t}$. Evidentemente esta función satisface la ecuación funcional. Teniendo en cuenta que $a_1 = 1$ hallamos que $\alpha = 1$, de donde $a_n = \frac{1}{n!}$. La unicidad de la solución se deduce de las relaciones iniciales. 4) $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 4^{-n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

3.22. 1) De $A(t) = (1-qt)A(qt)$ se deduce que $a_n = a_n q^n - a_{n-1}q^n$, de donde $a_n = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} (q^k - 1)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a_0 = 1$.

3.26. [1) y 2) $S(n, k, l+1) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \left[\binom{n+1}{\nu+1} - \binom{n}{\nu+1}\right] \times$

$\times (\nu+1+l)^k = \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{n+1-\nu} \binom{n+1}{\nu} (\nu+l)^k + \sum\limits_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\nu+l)^k =$ $= S(n+1, k, l) + S(n, k, l)$. 4) Demostración con inducción por k empleando el 3). Para cualesquiera l y $n > 0$ $S(n, 0, l) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} = 0$. Supongamos que la afirmación es justa para cierto $k \geqslant 0$, cualesquiera $n > k$ y cualesquiera l. Sea $k+1 < n$. Del 3) tenemos $S(n, k+1, l) = (n+l)S(n, k, l) + nS \times$ $\times (n-1, k, l)$. Como $k < n-1$, entonces, por presupuesto de la inducción, $S(n, k, l) = S(n-1, k, l) = 0$ y, en consecuencia, $S(n, k+1, l) = 0$. 5) Emplear 3) y 4). 6) Emplear 3) y 5). 7) Consecuencia de 2), 3) y 6).

3.27. 1) Mostrar que $\sigma_1(t) = t(1-t)^{-1}$ y que $(1-nt)\ \sigma_n(t) = nt\sigma_{n-1}(t)$.

§ 4

4.1. 1) Se deduce de que para $n > 2$ y $0 \leqslant t < n$ son válidas las desigualdades $n \leqslant (i+1)(n-t) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. 3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \leqslant \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t!} \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 3$. 4) Hacerlo con inducción por n empleando el 3). 6) Utilizar la desigualdad de Cauchy: $\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$, $a_i \geqslant 0$, y el hecho de que la media aritmética da los factores que se encuentran en el primer miembro de la desigualdad es igual a $\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3}$. 7) Poner $a_n = \frac{(2n-1)!!\sqrt{3n+1}}{(2n)!!}$ y mostrar que $\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^2 > 1$, $a_1 > 1$. 9) $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!}$.

4.2. 1) Emplear los 4.1, 1) y 4.1, 4). 2) Al demostrar la segunda desigualdad poner $a_k = \frac{n^n}{\binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k}}$ y mostrar que $a_1 = 1$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-k-1}\right)^{n-k-1}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1$ para $k < \frac{n-1}{2}$. 3) $\binom{2(n+1)}{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} > > \frac{2(2n+1)4^n}{2\sqrt{n(n+1)}\sqrt{n+1}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$; para la 2a. desigualdad emplear 4.1 7).

4.4. 5) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$. 4.5. 1) Sí. 2) No.

4.6. 1) Da $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{a_i:\ |a_i-\overline{a}|\geqslant t} (a_i-\overline{a})^2 \geqslant \delta_t t^2$. 2) INDICACION. Evaluar la fracción de aquellos vectores binarios de longitud n, cuyo número de coordenadas iguales a la unidad satisface la desigualdad $\left|k-\frac{n}{2}\right| \geqslant t\sqrt{n}$.

3) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k} < \sum_{k:\ |k-n/2|<(\log_2 n)\sqrt{n}} \frac{1}{k}\binom{n}{k} < < \frac{1}{(n/2)-\sqrt{n}\log_2 n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n-2\sqrt{n}\log_2 n}$. Ver 4.4, 1) y 4.6, 2).

4.7. 1) Empleando la fórmula (13) obtendremos

$$\binom{n}{k}=\frac{\sqrt{n}\,n^n\,(1+O\,(1/n))}{\sqrt{2\pi k\,(n-k)}\,k^k\,(n-k)^{n-k}}\,.$$

Pongamos $x=\frac{n}{2}-k$; entonces la expresión obtenida se puede escribir en la forma

$$\binom{n}{k}=\frac{(1+O\,(1/n))\,2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{2x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)}\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}-x}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}+x}}$$

A continuación tenemos

$$\ln\left[\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}-x}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}+x}\right]=\left(\frac{n}{2}-x\right)\ln\left(1-\frac{2x}{n}\right)+$$
$$+\left(\frac{n}{2}+x\right)\ln\left(1+\frac{2x}{n}\right)=\left(\frac{n}{2}-x\right)\left(-\frac{2x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2-\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{n}{2}+x\right)\left(\frac{2x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2+\ldots\right)=\frac{2x^2}{n}+\frac{16x^4}{3n^3}+O\left(\frac{x^6}{n^4}\right).$$

De aquí que $\binom{n}{k}\sim\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{(2k-n)^2}{n}}$ 2), 3) Cambio del enunciado del teorema de Moivre y Laplace. Véase por ejemplo [32].

4.8. 2) EVALUACIÓN DESDE ARRIBA. Empleando la desigualdad (13) obtenemos

$$\frac{n!}{(\lambda n)!\,(\mu n)!}<\frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}}\,\frac{1}{\lambda^{\lambda n}\mu^{\mu n}}\,\exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12\lambda n}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12\mu n}+\frac{1}{360\,(\lambda n)^3}+\frac{1}{360\,(\mu n)^3}\right\}.$$

Sin limitación de generalidad se puede considerar que $\lambda\geqslant\mu$. Entonces $\frac{1}{12n}<\frac{1}{12\lambda n}$, $\frac{1}{360\,(\lambda n)^3}+\frac{1}{360\,(\mu n)^3}\leqslant\frac{1}{180\mu^3n^3}<\frac{1}{12\mu n}$. De aquí que $\binom{n}{\lambda n}<$ $<G\,(n,\ \lambda)$. La evaluación inferior se demuestra en forma análoga. 3) Empleamos la evaluación inferior del problema 2). Si $\lambda n\geqslant 3$ o $\mu n\geqslant 3$, entonces $\frac{1}{12\lambda n}+\frac{1}{12\mu n}<\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$, pero $\exp\left\{-\frac{1}{9}\right\}>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si $\lambda n<3$ y $\mu n<3$, entonces $1\leqslant\mu n\leqslant\lambda n\leqslant 2$ y desigualdad se comprueba directamente. Para $\lambda n=\mu n=1$ tenemos $\binom{n}{n\lambda}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}G\,(n,\ \lambda)$. 4) La evaluación desde arriba $\sum_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\binom{n}{\lambda n}\sum_{i=0}^{\infty}\times\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^i=\frac{\lambda}{2\lambda-1}\binom{n}{\lambda n}$.

4.9. 1) $(n)_k=n^k\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)=n^k\exp\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)$, pero $\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)=$
$=-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{i}{n}\right)^\nu=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu n^\nu}\sum_{i=1}^{k-1}i^\nu$. 3) INDICACIÓN. Demostrar que $\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu^i=\frac{k^{i+1}}{i+1}+O(k^i)$ Véase 4.13, 2).

4.12. INDICACIÓN. Para $\int_n^m f(x)\,dx$ la suma integral superior es $\sum_{k=n+1}^{m}f(k)$ y la inferior es $\sum_{k=n}^{m-1}f(k)$.

4.15. 1) Descomponemos $A(t)$ en las fracciones simples: $A(t)=\frac{c_1}{\lambda_1-t}+\frac{c_2}{\lambda_2-t}+\ldots+\frac{c_m}{\lambda_m-t}+B(t)$, donde $B(t)$ es polinomio. Para hallar el coeficiente c_1 multiplicamos $A(t)$ por λ_1-t. Entonces $(\lambda_1-t)A(t)=$ $=\frac{-Q(t)}{(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_m)}$ Para $t=\lambda_1$ el primer miembro será igual a c_1 y el segundo, a $\frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$ Así que $c_1=\frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$. También se pueden calcular análogamente los coeficientes c_i $(i=\overline{2,\ m})$. La fracción $\frac{1}{1-t/\lambda_k}$ se puede descomponer en una progresión geométrica $\left(1-\frac{t}{\lambda_k}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda_k}\right)^n$. Obtenemos $A(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{\lambda_i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda_i}\right)^n+B(t)$. De aquí que para n grandes $a_n\sim$ $\sim\frac{c_1}{\lambda_1^{n+1}}+\frac{c_2}{\lambda_2^{n+1}}+\ldots+\frac{c_m}{\lambda_m^{n+1}}\sim c_1\lambda_1^{-n-1}$.

4.16. 1) $a_n\sim 2\cdot 3^n$; 2) $a_n\sim\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$ 3) $a_n\sim\left(-\frac{8}{13}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$; 4) $a_{2n}=0,\ \ a_{2n+1}\sim(-1)^n\,2^{n+3}$.

5) INDICACIÓN. $6t^4-17t^3+35t^2-22t+4=6\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)\times$ $\times(t-1+i\sqrt{3})(t-1-i\sqrt{3})$, $a_n\sim\frac{2}{31}3^n$.

4.17. 1) $a_n\sim(-3(-2)^n)$. 2) Sea $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. Multiplicando los dos miembros de la relación por t^n y sumando, obtendremos $A(t)-1=qtA(t)+$ $+pt(1-t)^{-1}-ptA(t)$. De aquí que $A(t)=\frac{1}{2}(1-t)^{-1}+\frac{1}{2}(1-(q-p)t)^{-1}$, $a_n=$

$=\frac{1}{2}-\frac{(q-p)^n}{2}\sim 1/2$. 3) $a_n=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{3}-\operatorname{sen}\frac{4\pi n}{3}\right)$. 4) $a_n\sim 3^n$. 5) $a_n\sim n^2 2^{n-5}$.

4.18. 1) Anotamos nuevamente la ecuación en la forma $x=\ln t-\ln x$ (*). Puesto que $t\to\infty$, pues se puede considerar que $t>e$ y, en consecuencia, $x>1$. Entonces de (*) se deduce que $x<\ln t$, o sea que $1<x<\ln t$. De aquí que $\ln x=O(\ln\ln t)$. De este modo $x=\ln t+O(\ln\ln t)$ con $t\to\infty$. Aplicando logaritmos tendremos que $\ln x=\ln\ln t+\ln\left(1+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)\right)=$ $=\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$. Sustituyendo en (*), obtendremos una nueva aproximación: $x=\ln t-\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$. De nuevo hallando por logaritmos y sustituyendo el resultado en el segundo miembro de (*), obtendremos una aproximación más que da la exactitud exigida (véase *N. G. de Brein.* Métodos asintóticos en el análisis. M. Literatura Extranjera, 1961).

4.19. INDICACIÓN. Primero mostrar que $f(t)=o(t)$ para $t\to\infty$. Entonces la igualdad inicial se puede escribir de la forma siguiente: $e^{tf(t)}=t+o(t)=O(1)$. Empleando esta igualdad mostrar que $f_1(t)=o(1)$ y transformar la igualdad inicial en $e^{tf(t)}=t+O(1)$. Por fin demostrar que $f(t)=$ $=\frac{\ln t}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

4.20. 1) Por medio de las relaciones (14) y (15) obtenemos que $a_3=\frac{9}{128}$, $a_4\leqslant\frac{11}{128}$. Con $n\geqslant 3$ la desigualdad (15) se puede escribir en la forma: $a_{n+2}\leqslant\frac{17}{1024}+a_n\left(\frac{323}{1024}+a_n\right)$. De esto se deduce que si $a_n\leqslant 1/8$, entonces también $a_{n+2}\leqslant 1/8$ para $n\geqslant 3$. Aprovechando el que $a_n\leqslant 1/8$ deduciremos de (15) una desigualdad nueva: $a_{n+2}\leqslant\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{n+1}{4^{n+1}}+\frac{1}{8}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}+\right.$ $\left.+\frac{n+2}{2^{n+2}}+4a_n\right)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}+\frac{1}{2}a_n$. De aquí, por inducción, $a_n\leqslant 9\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Empleando esta nueva aproximación deduciremos de (15) la desigualdad $a_{n+2}\leqslant\frac{1}{2^{n+3}}+66a_n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$. Utilizando esta última obtendremos que $a_n=$ $=2^{n-1}\left(1+O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)$.

4.21. 1) Veamos la relación $a_k=\frac{f(n,\ k+1)}{f(n,\ k)}=\frac{n-k}{k+1}2^{-2^k}$. Si $k<$ $<[\log_2\log_2 n]$, entonces $a_k>1$, si $k>[\log_2\log_2 n]$, entonces $a_k<1$. En consecuencia el valor máximo de $f(n, k)$ se alcanza, o bien con $k=[\log_2\log_2 n]$, o bien con $k=[\log_2\log_2 n]+1$. 2) El mismo resultado que en 1).

4.22. $\max\limits_r f(n,\ r,\ k)=\binom{n}{k}2^{-k+2^k}$, $\min\limits_r(n,\ r,\ k)=2\binom{n}{k}$.

4.23. 1) La función $2^{n-k}+2^{2^k}$ como función del argumento real k es convexa hacia las y negativas y además el mínimo se alcanza con $k=$

$=\log_2 \left(n-2\log_2 n+o\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)\right.$. De esto se deduce que con valores enteros de k y n suficientemente grandes, el mínimo de $f(n, k)$ se alcanza, o bien con $k=[\log_2 n]$, o bien con $k=[\log_2 n]-1$. Examinamos la función $\psi(n)=n-2^{[\log_2 n]}$. Está claro que $\psi(n)<n/2$. Examinemos varios casos: a) $\psi(n)=cn$, $0<c<1/2$; entonces

$$2^{n-[\log_2 n]}=\frac{2^n}{n-\psi(n)}=\frac{2^n}{(1-c)\,n},$$

$$2^{2\,[\log_2 n]}=2^{n-\psi(n)} \quad 2^{(1-c)\,n},$$

$$g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n}{(1-c)\,n};$$

b) $\psi(n)=\log_2 n+\varphi(n)$, donde $\varphi(n)=o(n)$, $\varphi(n)\longrightarrow\infty$ cuando $n\longrightarrow\infty$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n}{n}$; c) $\psi(n)=\log_2 n+c$, $c>0$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n\,(1+2^{-c})}{n}$; d) $\psi(n)<\log_2 n$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n]-1)\sim\frac{2^{n+1}}{n}$

BIBLIOGRAFIA

1. Automata. Studies. *Shennon C.*, *Mackarty J.*, a.o., Princeton, 1956.
2. *Алферова З. В.*, Теория алгоритмов, М., «Статистика», 1973. (*Alférova Z. V.*, Teoría de los algoritmos). (VII).
3. *Арбиб М.*, Мозг, машина и математика, М., «Наука», 1968. (*Arbib M.*, El cerebro, la máquina y las matemáticas). (VI, VII).
4. *Berge C.*, Theorie des graphes et ses applicationes. París, 1958. (IV).
5. *Berlekamp E.*, Algebraic Coding Theory. N.Y., 1968. (*Берлекемп Э.* (V).
6. *Виленкин Н. Я.*, Комбинаторика, М., «Наука», 1969. (*Vilenkin N. Ya.*, Combinatoria). (VIII).
7. *Гилл А.*, Введение в теорию конечных автоматов, М. «Наука», 1966. (*Guill A.*, Introducción a la teoría de los autómatas finitos). (VI).
8. *Гиндикин С. Г.*, Алгебра логики в задачах, М., «Наука», 1972. (*Guindikin S. G.*, El álgebra de la lógica en problemas). (I — IV, VI, VII).
9. *Глушков В. М.*, Синтез цифровых автоматов, М., «Физматгиз», 1962. (*Glushkov V. M.*, Síntesis de autómatas digitales). (VI).
10. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. I, М., «Наука», 1974. (Matemática discreta y problemas matemáticos de cibernética). (I — V).
11. *Захарова Е. Ю.*, Критерий полноты систем функций из P_k. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 18, М., «Наука», 1967. (*Zajárova E. Yu.*, Criterios de completitud de sistemas de funciones de P_k). (III).
12. *Захарова Е. Ю.*, *Яблонский С. В.*, О некоторых свойствах существенных функций из P_k, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 12, с. 247—252, М. «Наука», 1964. (*Zajárova E. Yu.*, *Yablonsky S. V.*, Sobre algunas propiedades de las funciones sustanciales de P_k). (VIII).
13. *Зыков А. А.*, Теория конечных графов, т. I, Новосибирск, «Наука», 1969. (*Zíkov A. A.*, Teoría de los grafos finitos). (IV).
14. *Kemeny J.* a.o., Introduction to Finite Mathematics. (IV, VIII).
15. *Кобринский Н. Е.*, *Трахтенброт Б. А.*, Введение в теорию конечных автоматов, М. «Физматгиз», 1962. (*Kobrinski N. E.*, *Trajtenbrot B. A.*, Introducción a la teoría de autómatas finitos). (VI).

[1]) Los números romanos que se indican entre paréntesis señalan los capítulos recomendados de los respectivos libros.

16. *Кофман А.*, Введение в прикладную комбинаторику, М., «Наука», 1975. (*Kofman A.*, Introducción a la combinatoria aplicada). (IV, VIII).
17. *Лавров И. А.*, *Максимова Л. Л.*, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., «Наука», 1975. (*Lavrov J. A.*, *Maksimova L. L.*, Problemas de la teoría de conjuntos, de lógica matemática y de la teoría de algoritmos). (I, II, VII).
18. *Леонтьев В. К.*, Задачи по вычислительным системам (ч. III. Дискретный анализ) МФТИ, 1975. (*Leóntiev V. C.*, Problemas de sistemas de cálculo). (V, VIII).
19. *Лупанов О. Б.*, О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, М., Физматгиз, 1963. (*Lupánov O. B.*, Sobre la síntesis de algunas clases de sistemas directrices). (I, IV).
20. *Мальцев А. И.*, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1965. (*Máltzev A. I.*, Algoritmos y funciones recursivas). (VII).
21. *Марков Ал. А.* Нерекуррентное кодирование, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 8, М., Физматгиз, 1962. (*Márkov A. A.*, Codificación no recurrente). (V).
22. *Мендельсон Э.*, Введение в математическую логику, М., «Наука», 1971. (*Mendelsón E.*, Introducción a la lógica matemática). (I, VII).
23. *Minsky M.*, Calculation and Automata. N.Y., 1967. (*Минский М.* (VI, VII).
24. *Мощенский В. А.*, Лекции по математической логике, Минск, Изд-во БГУ, 1973. (*Moschenski V. A.*, Lecciones de lógica matemática). (I, II, VII).
25. *Ore O.*, Theory of Graphe. N.Y., 1963. (IV).
26. *Peterson W.*, Error-Correting Codes. N.Y., 1961. (V).
27. *Riordan J.*, An Introduction to Combinatorial Analysis. N.Y., 1958. (IV, VIII).
28. *Rogers H. Jr.*, Theory of Recursive Functions and Effective Computability. N.Y., 1967. (VII).
29. *Рыбников К. А.*, Введение в комбинаторный анализ, М., Изд-во МГУ, 1972. (*Ribnikov C. A.*, Introducción al análisis combinatorio). (IV, VIII).
30. *Трахтенброт Б. А.*, Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., «Советское радио», 1974. (*Trajtenbrot B. A.*, Algoritmos y autómatas calculadores). (VI, VIII).
31. *Трахтенброт Б. А.*, *Барздинь Я. М.*, Конечные автоматы, М., «Наука», 1970. (*Trajtenbrot B. A.*, *Barzdin Ya. M.* Autómatas finitos). (VI).
32. *Feller W.*, An Introduction to Probability Theory and Its Applications. N.Y., 1966. (VIII).
33. *Harary F.*, Graph Theory. Rending, 1969. (IV).
34. *Hall M. Jr.*, Combinatorial Theory. Toronto, 1967. (IV, VIII).
35. *Яблонский С. В.*, Функциональные построения в k-значной логике, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958, 5—142. (*Yablonsky S. V.*, Construcciones funcionales en la lógica k-valente). (I, IV).
36. *Яблонский С. В.*, *Гаврилов Г. П.*, *Кудрявцев В. Б.*, Функции алгебры логики и классы Поста, М., «Наука», 1966. (*Yablonsky S. V.*, *Gavrilov G. P.*, *Kudriávtsev V. B.*, Funciones del álgebra de la lógica y las clases de Post). (I, II).

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

Alfabeto de entrada del autómata 155
— — salida del autómata 155
— — variables 23
— exterior de una máquina de Turing 185
— interior de una máquina de Turing 185
Ampliación del código óptimo 148
Ancho de la red 112
Anotación del algoritmo en operadores 189
Árbol 93
— cargado 157
— creciente 106
— radical 109
— — plano 109
—realizador de una aplicación 157
Árboles iguales 109
— informativos infinitos 156
Arco 91
— de la j-ésima fila 157
— — un orgrafo 104
— que parte de un vértice 104
— — pasa por un vértice 104
Arcos múltiples (paralelos) 104
Arista de un cubo 11
— — — grafo 91
— — — psoudografo 91
— inicial 137
— orientada 104

Base de una clase cerrada 181
— — un espacio lineal 142
— simple con relación a una clase cerrada 67
Bola de radio k 12
Bosque 93
Bucle 104

Cabezal lector (impresor) de una máquina de Turing 185
Cadena cerrada 92
— creciente en un cubo n-dimensional 12
— de la red 112
— en un cubo n-dimensional 12
— — — grafo 92
— hamiltoniana 93, 105
— más corta de la red 112
— que une los vértices 12, 92
— simple 92
Camino 92
—cerrado 92, 105
— hamiltoniano 105
— orientado 105

Capa k-ésima de un cubo 11
Capacidad de complejidad 211
Cara de un cubo n-dimensional
Cara dirigida 12
Cara exterior de un grafo plano 98
— interior de un grafo plano 99
Célula vac'a en la cinta 185
Células vecinas de la cinta 200
Centro de predicado 81
Cero idéntico 23
Certeza de la decodificación 140
Ciclos de grafos linealmente independientes 99
— — — — dependientes 99
Ciclo de longitud k en B^n 12
— de sustitución 78
— en un cubo n-dimensional 12
— — — grafo simple 92
— hamiltoniano 93
Cinta de la máquina de Turing 185
Clase de las funciones numéricas parcialmente calculables que conservan el predicado 79
Clases de conservación de la partición 80
— — — del conjunto e 80
— — las funciones parcialmente recursivas 205
— — — — primitivamente recursivas 204
— — — — recursivas generales 205
Clase precompleta 48, 181
— de subconjuntos A-equivalentes 128
Clases (funcionalmente) cerradas, de clausura o de cierre 180
Clausura de un conjunto 48
Codificación 138
Código 138
— alfabético 146
— binario 138
— compactamente empaquetado 138
— completo 146
— de Hamming 142
— — máquina básico de una colección 190
— del árbol 110
— de un conjunto 138
— — una palabra 138
— dual respecto al dado 143
— engendrado por una matriz 143
— equidistante 138
— equiponderado 139
— lineal o grupal 142
— l-múltiple de una colección 200
— maximal 138
— prefijo 146
— que encuentra t errores 139
— — corrige t errores 139
— reticulado de una colección 202
— uniforme o en bloque 138
— unívocamente decodificable o separable 146
Coeficiente binomial 216
— polinomial 216
Colección 11
— precedente a la colección $\widetilde{\alpha}$ 12
— propia de la implicante nuclear 42
— rigurosamente precedente a la colección $\widetilde{\alpha}$ 12
Colecciones adyacentes 11
— comparables con relación a ρ 83
— congruentes 12
— incongruentes 12
Combinación con repetición 215
— de pares máxima 93
— — — perfecta 93
— lineal de vectores 142
— sin repetición 215
Complejidad de una forma normal conjuntiva 31
— — — — — disyuntiva 31
— — — fórmula 26
— — — función booleana 131
— — un esquema 130, 131
— temporal del proceso de cálculo 211
Complemento de un grafo 92
Componente débil 105
— de conexión de un grafo 92
— — una cara (unilateral) 105
— fuerte 105
Composición de una máquina de Turing 189
Cómputo de Turing 188
Condensación de un orgrafo 105

Configuración conclusiva 188
— conclusivamente deducida de otra configuración 188
— deducida de otra configuración 188
— de la máquina de Turing 187
— inicial 188
Conjunción 23
— admisible 37
— elemental 30
— monótona 32
— sobre un conjunto de variables 30
Conjunto autodual 52
— cerrado con relación al conjunto de operaciones 180
— de funciones booleanas autoduales 52
— — — monótonas con relación a ρ 83
— — todas las funciones calculables que conservan el predicado 79
— — símbolos funcionales 22
— dual a un conjunto dado 52, 84
Constantes en la lógica k-valente 71
Contacto de apertura 129
— — clausura 129
Contorno 105
— hamiltoniano 105
Corte (de una red) 112
— mínimo 112
— sin salida 112
Criterio de la plenitud en el álgebra de la lógica 66
— — Sálomaa 86
— — Slupetsky 86
— — Yablonsky 86
Cubo unidad n-dimensional 11

Derivada de una función booleana 36
Descomposición canónica de una red 111
— de una red 110
Descripción recursiva primitiva de una función 203
Diagonalización 211
Diagrama de la descomposición canónica de una π-red 111
— — Moore
Diámetro de un grafo 92
Diferencia booleana 36
— por el módulo k 72
— simétrica de grafos 93
— truncada 72
Dimensión de una cara 13
— — un espacio lineal 142
Distancia de Hamming 11
— — un código 138
— entre dos células de la cinta 199
— — los vértices de un grafo 92
— — — — — — pseudografo orientado 105
Disyunción 23
— elemental 30
— sobre un conjunto de variables 30

Ecuaciones canónicas en forma escalar 166
— — — — vectorial 166
— — de un operador determinado 165
Elemento de retardo unitario 172
Elementos A-equivalentes del conjunto 121
Encubrimiento del conjunto de los vértices 99
— sin salida 100
Enlaces lógicos 23
Equivalencia 23
Equivalencias básicas 28
Error en el canal de comunicación 139
Esfera en un cubo n-dimensional 11
Espacio vectorial lineal 142
Esquema 129
— de contacto de k-polos 129
— — elementos funcionales 130
— del operador 166
— de una recursión primitiva 203
— dual de un esquema dado 133
— mínimo 130
— que realiza una función booleana 129
— sin repetición 133
— X^n-funcional 131
Espacio nulo de una matriz 143
Estado conclusivo 185
— de una máquina de Turing 185

Estado de un operador determinado 156
— inicial 185
Extracción de una arista 92
— — un vértice 92

Flecha u operación de Peirce 23
Forma normal conjuntiva (f.n.c.) 31
— — disyuntiva (f.n.d.) 31
— — — abreviada 37
— — — más corta 38
— — — mínima 37
— — — perfecta 31
— — — sin salida 38
Fórmula de Euler 99
— — inclusiones y exclusiones 224
— — Stirling 235
— dual a una dada 52
— idénticamente falsa 27
— — verdadera 27
Fórmulas equivalentes 25
Fragmento de un árbol 157
Fuente de un orgrafo 106
Función acotada-determinada 156
— autodual con relación a $s(x)$ 78
— booleana 21
— — autodual 52
— — dual a una función dada 52
— — elemental 22
— — que conserva la constante 58
— — lineal 55
— — monótona 61
— — no lineal 56
— — simétrica 26
— calculable (con los métodos de Turing) 190
— característica del número i 71
— — (de segundo género) del número i 71
— casi lineal con relación a la función φ 77
— de Ackermann 208
— — contacto 129
— del álgebra de la lógica 21
— de la lógika k-valente 71
— del movimiento (del cabezal) 186
— de las salidas 165, 186
— — los pasos (o de los traslados, o de transición) 165, 186
— — sucesión 204
— — selección o de elección de un argumento 204
— — Sheffer 66
— determinada 154
— — de n argumentos 155
— — votación 50
— — Webb 72
— dual a f con relación a $s(x)$ 77
— exponencial 228
— generatriz 228
— idéntica 23
— — a cero 23
— — — la unidad 23
— irreducible 66
— lineal 82
— monótona por la variable x_1 134
— — respecto a ρ 83
— nula 204
— que conserva el conjunto 79
— — — la partición 80
— — — el predicado 79
— — depende con retardo de una variable 167
— — realiza una fórmula sobre un conjunto de enlaces 24
— — — — — — — — — — símbolos funcionales 23
— — se realiza con un esquema 130, 131
— representable con un polinomio por módulo k 73
— simple con relación a una clase cerrada 67
— sustancial 86
— universal parcialmente recursiva 211
Funciones booleanas idénticas 43
— congruentes 48, 84
— determinadas distintas 155
— — equivalentes (o indistintas) 156
— elementales de la lógica k-valente 71
— simplísimas 204

Grado del vértice de un grafo 91
— de un polinomio 32

Grafo 91
— completamente inconexo 93
— completo 93
— con arcos múltiples 91
— — aristas y bucles múltiples 91
— conexo 92
— cúbico 93
— de un código alfabético 147
— dirigido 104
— k-conexo 93
— marcado 120
— no orientado 91
— numerado 120
— orientado 104
— planar 99
— plano 99
— regular 93
— trivial 93
— vacío 93
Grafos diferentes 120
— homeomorfos 93
— isomorfos 92
Grupo de automorfismos de un grafo 120
— — — — — pseudografo orientado 105
— — un grafo 120
Grosor de un grafo 99

Implicación 23, 72
Implicante 37
— nuclear 41
— simple 37
Incidencia de un arco y un vértice 104
Indice cíclico de un grupo 121
— de enlaces de una fórmula 26
Instrucciones en una máquina de Turing 186
Intervalo de una función booleana 38
— máximo 38
Iteración de la máquina de Turing 189

Lema de Burnside 121
— — la función no autodual 52
— — — — — lineal 56
— — — — — monótona 61

Letra 30
— (símbolo) de un alfabeto 154
Longitud de la forma normal conjuntiva 31
— — — — — disyuntiva 31
— — una red 112
— — un camino 92
— — una cadena 12
— — — palabra 146, 154
— — un período 162
— — — polinomio 32
— — — preperíodo 162
— — — vector 11

Máquina de Turing 185
— — — aplicable a la palabra P 188
— — — no aplicable a la palabra P 188
— — — que calcula la función 191
— — — que simula el funcionamiento de otra máquina de Turing en un retículo 200
Máquinas de Turing equivalentes 189
Matriz de adjunción 106
— — comprobación de un código 143
— — incidencia 106
— — un código 142
— — generadora de un código 143
Máximo de x e y 72
Mecanismo discreto que realiza una función determinada 155
Mediana 50
Método de las cascadas 136
— de los coeficientes indeterminados 34
Mínimo de x e y 72
Multigrafo 91
— orientado 104
Multiplicación cartesiana de grafos 93

Negación de Lukasevich 71
— — Post 71
— — x 23
n-factorial 216
Normas de un vector 11

Número de encubrimiento de las aristas 100
— — — — los vértices 100
— ciclométrico 99
— cromático 99
— — de las aristas 99
— de independencias 100
— de un vector 11
Numeración guedeliana 210

Operación de clausura 48, 180
— — extracción de alguna variable de salida, de los canales de salida y del polo a una función determinada 167
— — identificación de las variables 43
— — — — — — de entrada en una función determinada e identificación de los polos de entrada en un esquema 167
— — introducción a la retroacción 168
— — minimización 204
— — recursión primitiva 203
— — ramificación 179
— — superposición entre funciones determinadas 170
— — unión de funciones determinadas 169
Operador acotado-determinado 156
— autónomo (constante o sin entrada) 178
— determinado 154
— engendrado por un conjunto de funciones 163
— que se realiza con un estado dado 156
— residual engendrado por una palabra 156
Orbita 121
Orgrafo 104
— débil (débilmente conexo) 105
— fuerte (fuertemente conexo) 105
— inconexo 105
— sin contorno 107
— transitivo 107
— trivial 105
— unilateral (conexo unilateral) 105
Palabra casi periódica 162
— de entrada 155
— — salida 155
— en cierto alfabeto 154
— escrita en un retículo 200
— infinita 154
— inicial 188
— vacía 154
Par simétrico de arcos 104
Período de una palabra 162
Permutación con repetición 215
— sin repetición 215
Peso de la órbita 121
— — una función 121
— — — — acotada-determinada 156
— — un árbol 157
— — — código equiponderado 139
— — — vector 11
Polinomio característico 226
— de Zhegalkin 32
— por módulo k 73
Polo 110
Predicado central 81
— de n lugares determinado en conjunto E_k 79
— fuerte 89
— plenamente reflexivo 81
— — simétrico 81
Prefijo (comienzo) de una palabra 146, 154
Properíodo de una palabra 162
Primera forma de una función k-valente 72
Principio de dualidad 52
Producto por el módulo k 72
Profundidad de una fórmula 28
Pseudografo 91
— asociado a un paseudografo orientado 104
— autodual 99
— dual al dado 99
— hamiltoniano 105
— orientado 104
— — completo 106
Pseudografos isomorfos orientados 104
Punto de convergeucia 93

Rama de un árbol radical 109
Ramificación de una máquina de Turing 189
— — — red 110
Rango de una cara 13
— — — conjunción 30
— — — disyunción
Raya u operación de Sheffer 23
Red 109
— conexa 110
— descomponible 110
— exterior de una descomposición 110
— fuertemente conexa 110
— H-descomponible 110
— indescomponible 110
— interior de una descomposición 110
— k-polar 109
— p-descomponible 110
— paralelasecuencial 110
— s-descomponible 111
— trivial 110
Retículo con paso l 200

Segunda forma de una función k-valente 73
Selección o arreglo de volumen r 215
— no ordenada 215
— ordenada 215
Semigrado de comienzo 104
— — llegada 104
Serie enumeradora para las figuras 121
— — — — funciones (configuraciones) 121
Signo de una igualdad condicional 189
Símbolo vacío de un alfabeto 185
Sistema funcionalmente completo 48, 180
— hereditario de una función 66
— irreducible 48
— de Post 85
— — Rosser-Turquette 85
— — vectores linealmente independientes 142
Subárboles equivalentes 157
Subconjuntos A-equivalentes 128
Subdivisión de una arista 92
Subfunción 31
— propia 31
Subpalabra 146
Subgrafo 92
— de soporte 92
— — una red 110
— engendrado por un subconjunto de vértices 92
— propio 92
Subred 110
Sucesión de retorno (o regresiva) 226
Sufijo (terminación) de una palabra 146, 154
Suma por el módulo k 72
Sumidero de un orgrafo 106
Superposición de esquemas 170
— — funciones 203
— — redes 110
— sobre un conjunto de funciones 25
Sustitución cíclica (ciclo) 78

Tabla canónica de un operador acotado-determinado 165
Teorema de S. Picard 86
— — Polya 121
— — Post 66
— — R. Robinson 205
Torneo 106

Unidad de mando de una máquina de Turing 185
Unión de grafos 93
— — palabras 146, 154

Valor de un código 148
Variable ficticia (insustancial) 43
— — de una función determinada 155
— sustancial 43
— — de una función determinada 155
Vector binario 11
— booleano (de Boole) 11
— de los coeficientes de un polinomio 35
— — una estructura cíclica de sustitución 120

Vector de una función booleana 21
— precedente 12
Vectores adyacentes 11
— congruentes 12
— incongruentes 12
— opuestos 12
— ortogonales 143
Vértice aislado 91
— colgante 91
— de un cubo 11
— divisor 93
— final (o terminación) 104
— inicial (o comienzo) 104
— interior de una red 112
— mínimo de una red 112
Vértices adyacentes 91
— equivalentes de una red 112
Zona del proceso de cálculo 211
— de trabajo de una máquina de Turing 188

k-factor 93
(k, n) -esquema 129
(n, d) -cónigo 138
(n, k) -código 142
(l, k)-polos 130
$x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$ — componente de una función booleana 31
X^n-esquema 129
π-red 111
π-esquema 130

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Gordón V. y otros

Problemas de geometría descriptiva

Este libro ha sido elaborado de acuerdo con el material expuesto en el manual de V. O. Gordón «Curso de geometría descriptiva», siendo su complemento. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para comprender los problemas de dicho libro solamente se requiere conocer las tesis fundamentales que debe poseer todo manual.

Esta recopilación muestra el proceso utilizado para resolver problemas tipo, que aclaran tesis fundamentales del curso de geometría descriptiva, dando soluciones detalladas de una serie de problemas.

Al final del libro se encuentran las respuestas a los problemas propuestos. Estas respuestas se dan en forma textual o gráfica, en función del carácter de los problemas.

La selección de problemas, hecha considerando su cantidad y contenido, garantiza el aprendizaje del material teórico del curso general de geometría descriptiva.

Los problemas de geometría han sido elegidos según programas que sirven para los estudiantes de las especialidades de construcción de maquinarias, de aparatos y mecánico-tecnológicas de los centros de enseñanza técnica superior.

Faddéev D., Sominski I.

Problemas de álgebra superior

En la primera parte del libro se exponen 980 problemas de álgebra superior, comprendidos en los 7 capítulos siguientes: números complejos, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, polinomios y funciones racionales de una variable, funciones simétricas y álgebra lineal. En la segunda parte se dan algunas indicaciones breves para resolver los problemas más difíciles.

La tercera parte está dedicada a las respuestas; en algunos casos se da el método de solución. La aparición de este libro es fruto de la experiencia adquirida en las clases impartidas por los autores en la Universidad Estatal de Leningrado y en el Instituto Pedagógico Hertzen.

En 1975 nuestra Editorial publicó la versión española del libro del profesor A. Kurosch «Curso de álgebra superior». A pesar de que la presente obra fue hecha independientemente del libro del citado autor, al resolver los problemas conviene consultar la teoría correspondiente en el citado texto.

Esta recopilación de problemas está dedicada a los estudiantes de los primeros cursos de las universidades e institutos pedagógicos; la solución de los problemas propuestos facilitará la comprensión y asimilación del curso de álgebra superior.